



Università Cattolica del Sacro Cuore di Brescia

Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali

Anno accademico 2005-06

Tesi di laurea specialistica in Fisica

ASPETTI DI CONDENSAZIONE TACHIONICA NELLA TEORIA DI CAMPO DI STRINGA INDIPENDENTE DAL BACKGROUND

AUTORE: *Diego Fasoli*
Matricola 3309936

RELATORE: *Prof. Giuseppe Nardelli*
CORRELATORE: *Prof.ssa Silvia Penati*

ABSTRACT

Nell'ambito della teoria delle stringhe è stato ipotizzato che la comparsa del tachione nello spettro di massa sia dovuta all'identificazione dello stato di vuoto con il punto di massimo del potenziale tachionico.

Pertanto, allo scopo di eliminare questa particella indesiderata, si è resa necessaria la ricerca di un punto di minimo attorno al quale riformulare la teoria.

La ricerca del punto di minimo ha richiesto una riformulazione in seconda quantizzazione della teoria delle stringhe, il che ha portato a definire la cosiddetta *teoria di campo di stringa*.

La scoperta effettuata da Einstein, attraverso la relatività generale, che un'entità fisica è localizzata solamente rispetto ad un'altra entità fisica e non rispetto alla varietà dello spaziotempo, spinse Edward Witten, attorno agli anni '92-'93, a proporre una nuova formulazione della teoria di campo di stringa aperta, che fosse indipendente dal background.

Questa teoria è stata pertanto chiamata *background independent open string field theory*.

Un aspetto interessante è determinare le cosiddette *soluzioni di rolling*, che descrivono temporalmente il decadimento del tachione dal punto di massimo a quello di minimo del suo potenziale, processo che è definito *condensazione tachionica*.

Lo scopo di questa tesi è di dimostrare due delle tre congetture di Sen che sono state proposte per la teoria di campo di stringa, e di ricavare una particolare soluzione di rolling, nell'ambito della *background independent open string field theory*.

Ai miei genitori

INDICE

PREMESSA	4
INTRODUZIONE GENERALE	4
CAPITOLO 1: LA TEORIA DEI CAMPI	
1.1 INTRODUZIONE	15
1.2 LA TEORIA DI CAMPO CLASSICA	17
1.3 LA TEORIA DI CAMPO QUANTISTICA	20
1.4 LA TEORIA DI CAMPO IN PRIMA QUANTIZZAZIONE	22
1.5 INTRODUZIONE DI EXTRA DIMENSIONI SPAZIALI NELLA TEORIA DEI CAMPI	24
CAPITOLO 2: LA TEORIA DELLE STRINGHE	
2.1 INTRODUZIONE	27
2.2 LA TEORIA DELLE STRINGHE CLASSICA	33
2.3 LA TEORIA DELLE STRINGHE QUANTISTICA	41
2.4 LO SPETTRO DELLA STRINGA QUANTISTICA	53
2.5 COMPATTIFICAZIONE DELLE EXTRA DIMENSIONI SPAZIALI	68
2.6 D-BRANE	75
CAPITOLO 3: LA TEORIA DI CAMPO DI STRINGA (CUBIC STRING FIELD THEORY)	
3.1 INTRODUZIONE	78
3.2 CUBIC STRING FIELD THEORY	82
CAPITOLO 4: BACKGROUND INDEPENDENT OPEN STRING FIELD THEORY	
4.1 INTRODUZIONE	93
4.2 FORMULAZIONE DELLA BACKGROUND INDEPENDENT OPEN STRING FIELD THEORY	96
4.3 L'AZIONE DI SPAZIOTEMPO	105
4.4 GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE DEL WORLD-SHEET	107
4.5 RINORMALIZZAZIONE DEL CAMPO TACHIONICO	109
4.6 GIUSTIFICAZIONE DELL'ANNULLAMENTO DEI MODI DI STRINGA ECCITATA	125
4.7 CALCOLO DELL'AZIONE DI SPAZIOTEMPO	128
4.8 CALCOLO DEL FATTORE DI NORMALIZZAZIONE K	132
4.9 CONDENSAZIONE TACHIONICA	133
4.10 SCOMPARSA DEL TACHIONE NEL VUOTO STABILE	139
4.11 UNA SOLUZIONE DI ROLLING	145
APPENDICE	
A.1 IMPOSTAZIONE MODERNA DELLA TEORIA DI CAMPO PER LA PARTICELLA PUNTIFORME	154
A.2 L'IDENTITÀ DI WARD ED IL LEGAME TRA L'OPE E L'ALGEBRA DELLE CARICHE CONSERVATE	156
A.3 LA TEORIA DI CAMPO CONFORME IN DUE DIMENSIONI	159
A.4 QUANTIZZAZIONE BRST	170
BIBLIOGRAFIA	175

PREMESSA

Lo scopo di questa tesi è definire e studiare la teoria di campo di stringa indipendente dal background, che è una riformulazione della teoria delle stringhe (in prima quantizzazione) attraverso la teoria dei campi.

Quindi, per completezza, ho riassunto anche la teoria di campo per la particella puntiforme (capitolo 1) e la teoria delle stringhe in prima quantizzazione (capitolo 2).

Se il lettore è già a conoscenza di questi argomenti, può tralasciare la lettura dei capitoli 1 e 2, e passare direttamente ai capitoli 3 e 4.

Si consiglia comunque la lettura della seguente introduzione generale, per una migliore comprensione della teoria di campo di stringa.

INTRODUZIONE GENERALE

La teoria di campo quantistica nacque col problema di determinare l'energia irradiata da un atomo quando esso decade da uno stato quantistico ad un altro di minore energia, problema che fu dapprima esaminato da Max Born e Pascual Jordan nel 1925.

Successivamente, nel 1926, Born e Jordan, assieme a Werner Heisenberg, formularono la teoria quantistica del campo elettromagnetico, trascurando la polarizzazione e le sorgenti, ottenendo quella che oggi viene chiamata una teoria di campo libera.

Allo scopo di quantizzare questa teoria, essi utilizzarono il procedimento della quantizzazione canonica, cioè usarono un'estensione delle regole di commutazione di Heisenberg.

Nel 1927, Paul Dirac diede la prima trattazione consistente di questo problema.

Quindi la teoria di campo nacque da una trattazione quantistica dell'unico campo classico allora noto (oltre a quello gravitazionale, che presenta una serie di problemi quando si cerca di effettuarne la quantizzazione, come spiegheremo successivamente nel corso di questa introduzione), cioè il campo elettromagnetico.

La teoria fu richiesta per trattare una situazione dove *il numero delle particelle cambiava*.

In questo caso, un atomo in uno stato iniziale eccitato (cioè una sola particella) diventa un atomo in uno stato finale diseccitato assieme ad un fotone (e quindi due particelle).

Fu ovvio sin dall'inizio che la trattazione quantistica del campo elettromagnetico richiedesse un'appropriata trattazione della relatività, dato che il fotone emesso dall'atomo si muove alla velocità della luce.

Jordan e Pauli mostrarono nel 1928 che i commutatori del campo erano effettivamente Lorentz-invarianti.

Nel 1933 Niels Bohr e Leon Rosenfeld collegarono queste relazioni di commutazione ad una limitazione sulla capacità di misurare i campi a separazioni di tipo space-like.

Lo sviluppo dell'equazione di Dirac e della teoria delle lacune portò la teoria di campo quantistica a spiegare ciò usando l'idea della causalità in relatività, lavoro che fu completato da Wendell Furry e Robert Oppenheimer, attraverso i metodi che erano stati sviluppati per questo scopo da Vladimir Fock.

Questo bisogno di unificare la relatività e la meccanica quantistica fu una seconda motivazione che portò allo sviluppo della teoria di campo quantistica.

La fase di sviluppo culminò con la formulazione della teoria dell'elettrodinamica quantistica negli anni '50.

Quindi la teoria di campo quantistica nacque inizialmente con lo scopo di quantizzare il campo elettromagnetico, e fu successivamente applicata anche ad altri contesti della fisica.

Per esempio, le particelle elementari prodotte dagli acceleratori ad alta energia verranno correttamente descritte da una teoria che unifichi la relatività speciale ed i principi quantistici, pertanto la fisica delle particelle rientra in modo naturale nel dominio della teoria di campo quantistica.

Nel 1927 Jordan provò ad estendere la quantizzazione canonica dei campi (cioè quella effettuata attraverso le regole di commutazione) alle funzioni d'onda che compaiono nella meccanica quantistica delle particelle, dando origine al nome di *seconda quantizzazione* per questa procedura.

L'equazione di Schrodinger (dalla quale si ottiene la funzione d'onda) corregge la meccanica classica tenendo conto dei principi quantistici e descrive pertanto la cosiddetta prima quantizzazione.

Quello che invece fece Jordan fu di applicare le regole di commutazione quantistiche ad un sistema già quantistico per tener conto anche della non conservazione del numero delle particelle, e cioè "quantizzò un sistema già quantizzato", da cui il nome di seconda quantizzazione.

Nel 1928 Jordan e Wigner scoprirono che il principio di esclusione di Pauli richiedeva che il campo dell'elettrone fosse espanso usando operatori di creazione e distruzione anticommutanti.

Questo fu il terzo punto nello sviluppo della teoria di campo quantistica: il bisogno di trattare la statistica (Bose-Einstein o Fermi-Dirac) di sistemi a molte particelle.

Come abbiamo già detto precedentemente, nel 1927 Dirac formulò l'equazione quantistica e relativisticamente invariante per l'elettrone, nota appunto come *equazione di Dirac*.

In questa equazione si poneva il problema dell'interpretazione delle soluzioni per stati di energia negativa.

Grazie al lavoro di Dirac, Feynman e Stueckelberg (come spiegato nel paragrafo 1.1), questo problema portò alla previsione teorica di quella che fu chiamata *antiparticella dell'elettrone* o *positrone*, che fu poi scoperta sperimentalmente nel 1932 da Blackett, Occhialini e Anderson.

L'unione della relatività speciale con la meccanica quantistica portò quindi una serie d'informazioni che le due teorie non potevano offrire se considerate singolarmente: la dimostrazione del principio di esclusione di Pauli (che nella meccanica quantistica non-relativistica è semplicemente un'ipotesi ad hoc), l'esistenza delle antiparticelle, ed il cosiddetto *teorema TCP* [1].

Successivamente furono scoperte e poi quantizzate altre forze fondamentali: quelle nucleari, forte e debole.

Queste tre forze fondamentali sono state poi (parzialmente) unificate ed inglobate nel cosiddetto Modello Standard delle particelle elementari, che fa uso della teoria di campo quantistica.

Questo sforzo iniziò negli anni '50 con il lavoro di Yang e Mills, fu portato avanti da Martinus Veltman ed altri durante gli anni '60 e fu completato negli anni '70 grazie al lavoro di moltissimi fisici, tra cui Gerard 't Hooft.

La teoria dei campi delle particelle puntiformi si è quindi dimostrata essere un valido strumento per descrivere la forza nucleare forte, attraverso la cosiddetta teoria della *cromodinamica quantistica* (QCD).

Tuttavia, verso la fine degli anni '60, prima di capire che la forza nucleare forte poteva essere descritta da una teoria di campo quantistica, era stata formulata un'altra teoria per descrivere tale forza.

Infatti in quegli anni si era reso necessario trovare una teoria che descrivesse la forza nucleare forte in seguito alla scoperta di un gran numero di particelle che interagivano attraverso tale forza (i cosiddetti adroni).

Una delle ragioni per le quali questa proliferazione risultava sorprendente era rappresentato dal fatto che erano note molte meno particelle massive che interagivano attraverso le forze debole ed elettromagnetica.

Le particelle che interagivano attraverso la forza forte risultarono essere di masse e spin differenti (la relazione tra i due fu sperimentalmente determinata essere $J=\alpha'm^2$, dove α' è detto *Regge slope*, e vale approssimativamente 1 GeV^{-2}), e purtroppo non era allora nota alcuna teoria consistente per le particelle elementari di spin elevato.

Allora erano note teorie quantistiche di campo consistenti solamente per gli spin 0, $\frac{1}{2}$ ed 1: in quattro dimensioni il comportamento ad alta energia dell'ampiezza di scattering delle particelle di spin 0 od $\frac{1}{2}$ è convergente, quello di particelle di spin 1 ha una divergenza logaritmica appena compatibile con la rinormalizzabilità, mentre particelle di spin maggiore di 1 presentano una divergenza non rinormalizzabile (oggi è stata inclusa la teoria di Yang-Mills nella lista delle teorie consistenti di spin 1, ma tuttora questa limitazione sui possibili valori di spin trattabili in una teoria di campo quantistica consistente sembra essere valida).

Per questo motivo un approccio alle interazioni forti attraverso la teoria di campo allora non sembrava promettente.

Venne pertanto introdotta una nuova idea per descrivere le interazioni forti: l'ipotesi della *dualità*, realizzata nel cosiddetto *modello di Veneziano* (si veda il paragrafo 2.1 per una descrizione più dettagliata).

Il modello di Veneziano consisteva nel supporre che in un processo di scattering venisse scambiata un'infinità di particelle, in modo che l'ampiezza di scattering totale fosse pari alla somma delle singole ampiezze di scattering delle infinite particelle scambiate.

L'idea era di effettuare questa somma di infinite ampiezze di scattering in modo che la serie risultante avesse ad alta energia un comportamento migliore rispetto a quello delle singole ampiezze di scattering sommate.

Il modello di Veneziano non era comunque esente da problemi, in quanto per esempio prevedeva l'esistenza di particelle di massa nulla che non erano mai state osservate sperimentalmente.

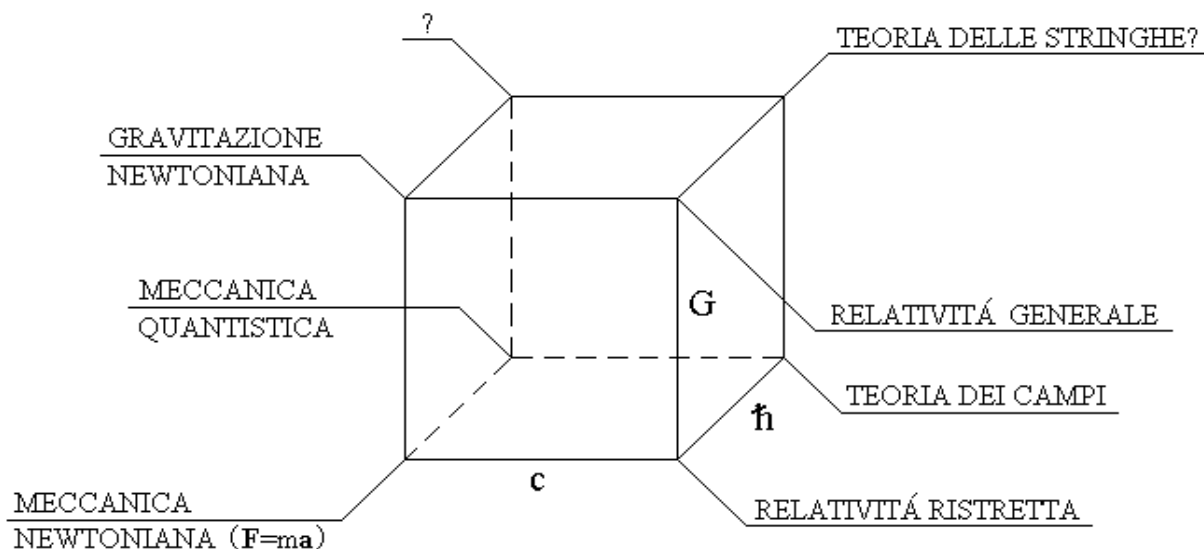
Inoltre questo modello non presentava un accordo molto buono con i dati derivanti dagli esperimenti di scattering ad alta energia ed angoli fissati, cosa che invece riuscì alla QCD introdotta negli anni '73 e '74.

Così la motivazione originale per studiare i modelli duali scomparve, ma quasi contemporaneamente ne nacque una nuova: la formulazione di una teoria quantistica della gravità.

Infatti le interazioni forti sono solamente una delle aree della fisica nelle quali si presenta il problema di descrivere particelle elementari di spin elevato.

Questo problema si verifica anche nella teoria quantistica della gravità.

Prima però vediamo cosa s'intende per gravità quantistica, considerando il seguente grafico:



Questo grafico mostra quali sono le teorie che sono state formulate nel corso della storia al fine di unificare la meccanica relativistica (rappresentata nel grafico dalla lettera c , cioè dal simbolo della velocità della luce), la meccanica quantistica (rappresentata dalla lettera \hbar , cioè dal simbolo della costante di Planck) e la forza gravitazionale (rappresentata dalla lettera G , cioè dal simbolo della costante di gravitazione universale di Newton).

Per esempio, per unificare la meccanica relativistica con la forza gravitazionale, è stata formulata la teoria della relatività generale, rappresentata dal vertice nel grafico che collega gli spigoli c e G .

Al vertice che collega gli spigoli \hbar e G abbiamo assegnato un ? perchè questa unificazione non ha richiesto la formulazione di una nuova teoria, dato che per descrivere la gravità quantistica non-relativistica basta inserire la formula del potenziale gravitazionale newtoniano all'interno dell'equazione di Schrodinger (comunque, nonostante la semplicità di questa unificazione di \hbar con G , essa prevede già un effetto importante, che consiste nel fatto che la gravità, a livello quantistico, non è più una teoria geometrica, in quanto il moto dipende dal rapporto \hbar/m , il che è stato confermato anche sperimentalmente).

Ovviamente la teoria completa è quella che unifica tutte e tre le singole teorie dette, e che quindi nel grafico è rappresentata dal vertice che collega gli spigoli c , \hbar e G .

Questa teoria pertanto è in grado di descrivere in modo corretto la forza gravitazionale, cioè di tenere contemporaneamente conto degli effetti quantistici e di quelli relativistici.

La necessità di conoscere gli effetti relativistici della forza gravitazionale è già stata spiegata da Einstein nella sua formulazione della teoria della relatività generale.

A livello quantistico le onde gravitazionali previste dalla teoria della relatività generale sono descritte (dualità onda-particella) da delle particelle, i mediatori della forza gravitazionale, dette *gravitoni*.

Siccome la forza gravitazionale ha un raggio d'interazione infinito, ne segue che la massa dei gravitoni deve essere nulla, e quindi essi si sposteranno alla velocità della luce: questo è il modo quantistico di vedere il perchè della necessità di unificare la forza gravitazionale con la meccanica relativistica.

Per quanto riguarda invece l'unificazione della forza gravitazionale con la meccanica quantistica, bisogna osservare che questa è necessaria solamente ad alta energia.

Infatti gli effetti della meccanica quantistica sulla forza gravitazionale in teoria non dovrebbero essere più trascurabili a partire da energie dell'ordine di $\sqrt{\hbar c / G} \sim 10^{19}$ GeV.

Per esempio gli effetti quantistici sulla gravità saranno non trascurabili nei buchi neri.

Infatti in tali sistemi la forza gravitazionale è così elevata da richiedere l'uso della relatività generale (e quindi l'unificazione della relatività con la forza gravitazionale), ed inoltre essi potrebbero avere dimensioni spaziali così piccole da richiedere anche l'uso della meccanica quantistica.

In generale si dimostra (si veda il paragrafo 2.1) che il gravitone deve avere spin 2, indipendentemente dalla teoria che è usata per descriverlo.

Pertanto, in base a quanto detto prima (cioè che solamente le particelle di spin 1 hanno una divergenza logaritmica appena compatibile con la rinormalizzabilità), la gravità quantistica non può essere descritta da una teoria di campo, poichè altrimenti tale teoria di campo sarebbe non-rinormalizzabile [2].

Bisogna poi risolvere il problema di accoppiare la gravità quantistica alla materia.

Però noi descriviamo la materia attraverso le teorie di campo, le quali non sappiamo se funzionano correttamente anche per energie maggiori di 100 GeV.

Siccome in un processo gli effetti quantistici sulla gravità cominciano ad essere osservabili solamente a partire dai 10^{19} GeV, che sono molto maggiori di 100 GeV, ne segue che non possiamo essere sicuri che la teoria che descrive la materia possa essere ancora corretta a quel punto.

Altrimenti, per essere sicuri che la teoria di campo descriva correttamente la materia, dobbiamo rimanere ad energie inferiori ai 100 GeV, ma a tali energie la forza gravitazionale è trascurabile, e quindi non servirebbe a niente la sua quantizzazione.

Queste osservazioni portarono a concludere che serviva una teoria decisamente nuova.

La teoria in questione potrebbe essere la teoria delle stringhe.

Nella teoria delle stringhe, a differenza dell'ordinaria teoria dei campi, le particelle non sono più rappresentate da oggetti puntiformi, bensì da oggetti monodimensionali (e cioè dotati di lunghezza), le stringhe appunto, la cui dimensione è dell'ordine della cosiddetta *lunghezza di Planck*, che è pari a 10^{-33} cm (si veda il paragrafo 2.5).

Le stringhe esistono in due versioni, le stringhe aperte e chiuse, ed entrambe hanno infiniti modi normali di vibrazione, ciascuno dei quali rappresenta una particella differente.

Ci si può domandare perchè, per rappresentare la particella, venga usato proprio un oggetto monodimensionale (la stringa) e non degli oggetti di dimensione maggiore (come membrane ...).

Una possibile risposta a questa domanda è abbastanza tecnica, e consiste nel fatto che solamente l'azione di un oggetto monodimensionale presenta abbastanza libertà di gauge da eliminare l'integrazione sopra la metrica nell'integrale funzionale, eliminazione che viene effettuata fissando la metrica ad una qualche specifica forma funzionale, che viene detta metrica *fiduciaria* (si veda il paragrafo 2.3).

Un'altra possibile risposta è rappresentata dal fatto che l'azione di un oggetto n-dimensionale definisce una teoria di campo quantistica (n+1)-dimensionale, che per il power counting è rinormalizzabile per n=1 (cioè il caso della stringa) e non-rinormalizzabile per n>1.

Pertanto dare senso all'azione di un oggetto n-dimensionale come una teoria quantistica per n>1 è un problema difficile tanto quanto quello di dare senso alla relatività generale come teoria quantistica.

Quindi le membrane e gli oggetti di dimensione più alta difficilmente sono dei punti di partenza promettenti verso la gravità quantistica [3].

Prima abbiamo detto che la stringa ha infiniti modi normali di vibrazione, ciascuno dei quali rappresenta una particella differente.

Tra queste particelle (più precisamente nello spettro della stringa chiusa) compare anche una particella di massa nulla e spin 2 (si veda il paragrafo 2.4), che ovviamente viene interpretata come il gravitone.

Quindi la teoria delle stringhe è in grado di descrivere il gravitone, e quindi è un buon candidato per descrivere la gravità quantistica.

Inoltre, siccome abbiamo detto che la stringa nel suo spettro contiene infinite particelle, ne segue che scambiare una stringa in un processo di scattering è come scambiare infinite particelle.

Avevamo già parlato in precedenza dell'idea di considerare uno scambio di infinite particelle in un processo di scattering, quando abbiamo introdotto il modello di Veneziano.

Infatti si dimostra che le ampiezze di scattering che si calcolano dalla teoria delle stringhe sono della forma postulata da Veneziano: questo è un altro grande successo della teoria delle stringhe.

La teoria delle stringhe non è comunque priva di problemi.

Infatti, prima di tutto, per essere autoconsistente anche a livello quantistico, essa prevede un numero di dimensioni spaziotemporali $D > 4$, il che apparentemente non si concilia con l'osservazione sperimentale, la quale richiede $D = 4$.

Questo problema può essere superato attraverso la cosiddetta *compattificazione* delle extra dimensioni spaziali.

La compactificazione consiste nel supporre che le dimensioni spaziali in più previste dalla teoria delle stringhe quantistiche siano periodiche, con un raggio di compactificazione piccolo, al fine di spiegare perchè queste dimensioni non vengono da noi percepite.

Per capire quanto appena affermato, consideriamo il semplice caso di una teoria con solo due dimensioni spaziali, delle quali una è periodica.

Questa situazione è rappresentata da un cilindro di raggio R e di lunghezza infinita.

Infatti la lunghezza infinita rappresenta la dimensione spaziale non compattificata.

Se il raggio R è piccolo, guardando il cilindro da grande distanza (il che corrisponde a studiare la fisica a bassa energia) esso apparirà come una linea retta, cioè non possiamo renderci conto che essa ha anche uno spessore (dovuto ad R).

Se invece la guardiamo da vicino (il che corrisponde a studiare la fisica ad alta energia) essa riapparirà come un cilindro, cioè essa mostrerà la presenza della dimensione spaziale aggiuntiva.

Questo può poi essere generalizzato al caso delle tre dimensioni spaziali non compattificate (al paragrafo 2.5 verrà poi spiegato come nella teoria delle stringhe sia possibile avere delle dimensioni compattificate anche con raggio R grande senza poterle osservare sperimentalmente).

Un altro concetto importante che emerge dalla teoria delle stringhe è quello delle cosiddette *D-brane*, che tornerà utile anche nello studio della condensazione tachionica al capitolo 4.

Consideriamo una stringa aperta non-relativistica.

Essa è descritta dall'equazione delle onde lineare, che essendo un'equazione differenziale alle derivate parziali sia spaziali che temporali, richiede sia condizioni al contorno che condizioni iniziali.

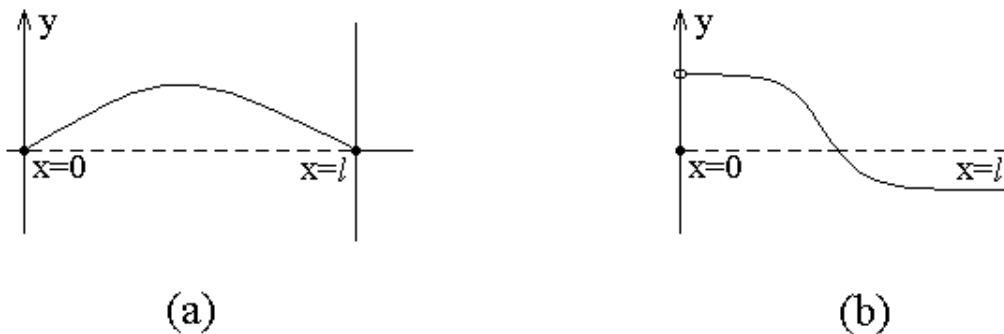
Le condizioni al contorno vincolano la soluzione al bordo del sistema, mentre le condizioni iniziali vincolano la soluzione ad un dato tempo di partenza.

I tipi più comuni di condizioni al contorno sono quelle di Dirichlet e quelle di Neumann.

Le condizioni di Dirichlet rappresentano il caso in cui gli estremi della stringa aperta siano fissi, cioè il caso in cui essi non possano oscillare.

Invece le condizioni di Neumann rappresentano il caso in cui gli estremi della stringa aperta siano liberi di vibrare.

Queste due diverse condizioni al contorno sono mostrate nella seguente figura:



La parte (a) della figura rappresenta le condizioni al contorno di Dirichlet, mentre la parte (b) le condizioni al contorno di Neumann.

Infatti nella parte (a) della figura sono specificate le posizioni degli estremi della stringa, dato che abbiamo imposto:

$$y(t, x = 0) = y(t, x = l) = 0.$$

Invece nella parte (b) della figura gli estremi della stringa aperta sono liberi di oscillare lungo l'asse y , dato che in questo caso abbiamo supposto che gli estremi della stringa siano collegati a degli anelli di massa nulla che possano scorrere senza attrito lungo l'asse y .

Le condizioni al contorno di Neumann specificano i valori delle derivate $\partial y / \partial x$ agli estremi della stringa.

Siccome gli anelli hanno massa nulla e scrono senza attrito, allora la derivata $\partial y / \partial x$ deve essere nulla agli estremi $x=0$ ed $x=l$.

Infatti, se queste due derivate non fossero nulle, allora la pendenza della stringa sull'anello sarebbe diversa da zero, ed una componente della tensione della stringa accelererebbe l'anello nella direzione y .

Siccome gli anelli hanno massa nulla, la loro accelerazione sarebbe infinita.

Questo non è possibile, e quindi deve necessariamente essere:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, x = 0) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, x = l) = 0,$$

come avevamo detto.

Il fatto che $\partial y/\partial x$ sia nullo agli estremi della stringa aperta implica che nessun *momento* possa fluire dentro o fuori dagli estremi, e quindi in questo caso il momento si conserva.

Invece con le condizioni al contorno di Dirichlet si ha che $\partial y/\partial x \neq 0$ agli estremi della stringa aperta, il che implica che del *momento* possa fluire dentro o fuori dagli estremi.

Quindi in generale il momento può fluire lungo una stringa, ma nel caso particolare in cui vengano usate le condizioni al contorno di Dirichlet, il momento una volta giunto ad un'estremità può sfuggire dalla stringa e svanire.

Ciò pone un problema, perchè per la conservazione del momento esso non può svanire dal sistema.

Quindi, per garantire la conservazione del momento totale del sistema, bisogna supporre che in questo caso (cioè nel caso in cui vengano usate le condizioni al contorno di Dirichlet) gli estremi della stringa aperta siano collegati ad un qualche oggetto fisico.

Questi oggetti fisici sono stati chiamati *membrane di Dirichlet*, o più brevemente *D-brane*.

Quindi, nel caso in cui per la stringa aperta vengano scelte le condizioni al contorno di Dirichlet, gli estremi di tale stringa devono essere collegati a delle D-brane: in questo senso le D-brane sono entità reali, proprio come le stringhe.

Una D-brana è caratterizzata dalla sua dimensionalità D , o, più precisamente, dal numero di dimensioni spaziali che essa possiede.

Per esempio, nel caso mostrato nella parte (a) della precedente figura, la stringa è attaccata a due punti: $(x,y)=(0,0)$ ed $(x,y)=(l,0)$.

Siccome ciascuno di questi punti è un oggetto 0-dimensionale, ne segue che essi costituiscono due D0-brane.

Invece, nel caso mostrato nella parte (b) della precedente figura, gli estremi della stringa sono collegati a due rette: $x=0$ ed $x=l$.

Siccome ciascuna di queste due rette è un oggetto 1-dimensionale, ne segue che esse costituiscono due D1-brane.

Quindi in generale una D p -brana costituisce una D-brana estesa in p dimensioni spaziali.

Nei due casi mostrati con la figura precedente abbiamo supposto che la stringa aperta fosse collegata a due D-brane diverse.

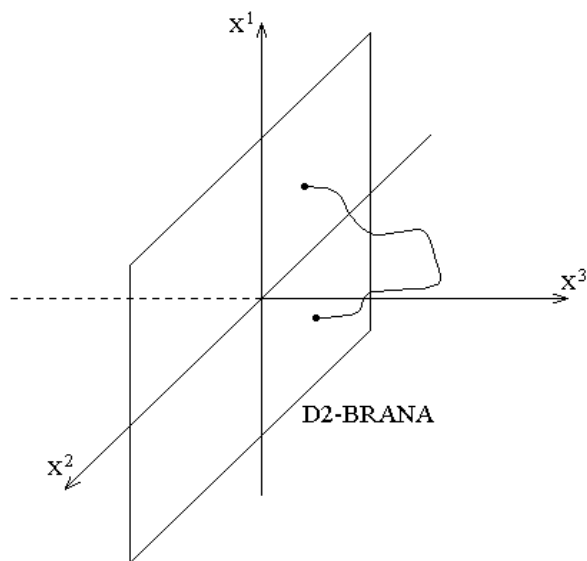
Però potrebbe anche verificarsi il caso in cui una stringa abbia entrambi gli estremi collegati alla stessa D-brana.

Comunque in ogni caso le D-brane, essendo attaccate alla stringa, trasmetteranno momento alla stringa stessa e ne riceveranno da essa, in modo tale che il momento totale del sistema (stringa) + (D-brane) sia costante, anche se il momento della stringa non rimane costante.

Siccome gli estremi della stringa aperta devono giacere su una D p -brana, questo vuol dire che deve essere stato specificato un set di condizioni al contorno di Dirichlet.

Per esempio, una D2-brana in uno spazio tridimensionale è specificata da una condizione, diciamo $x^3=0$.

Questo significa che la D2-brana si estende sul piano (x^1, x^2) :



La condizione al contorno di Dirichlet è applicata alla coordinata X^3 della stringa, che deve annullarsi agli estremi.

Inoltre, dato che il moto degli estremi è libero lungo le direzioni della brana, le coordinate X^1 ed X^2 della stringa soddisfano condizioni al contorno di Neumann.

Quando gli estremi della stringa aperta hanno condizioni al contorno di Neumann lungo tutte le direzioni spaziali, abbiamo ancora una D-brana, ma questa volta essa è una D-brana che riempie tutto lo spazio (*space-filling D-brane*).

Ogni particella elementare è ritenuta essere il risultato di stati vibrazionali di stringhe quantistiche, per cui è lecito chiedersi se anche le D-brane siano *qualcosa* costituito da stringhe.

In un certo senso la risposta risulta essere affermativa: nella gamma di particelle previste dalla teoria delle stringhe, se ne incontra una detta *tachione*, avente massa immaginaria (parleremo più avanti di questa particella).

Consideriamo una D-brana di estensione indefinita nello spazio e avente numero di dimensioni spaziali pari a quelle del nostro universo.

Le stringhe connesse a questa brana si muovono lungo un campo di tachioni che *vivono* nel volume della D-brana; altre brane, di dimensioni inferiori, possono esistere nel volume della brana-universo (cioè della *space-filling D-brane*).

Queste brane possono essere pensate come famiglie di tachioni *coerenti*, così come un raggio laser è un insieme di fotoni coerenti.

Per essere precisi, si dimostra che il tachione può essere rappresentato come un'instabilità della D-brana.

Per la stringa relativistica (quantistica) la consistenza delle condizioni al contorno di Dirichlet permette di scoprire le proprietà delle D-brane.

Le D-brane sono oggetti fisici che esistono in una teoria delle stringhe, e non sono introdotte a mano.

Le D-brane non necessitano di avere estensione infinita e non sono necessariamente iperpiani.

Esse hanno densità di energia calcolabile e diverse proprietà notevoli (maggiori informazioni sono riportate al paragrafo 2.6).

I veri problemi della teoria delle stringhe sono due: l'impossibilità di descrivere le particelle fermioniche e l'esistenza del tachione.

Cominciamo con il descrivere il primo problema.

Abbiamo detto che i modi normali di vibrazione della stringa rappresentano delle particelle, di massa e spin differenti.

Quello che però si scopre (si veda il paragrafo 2.4) è che lo spettro contiene solamente particelle di spin intero, e cioè particelle bosoniche.

Questo si verifica sia per la stringa aperta che per quella chiusa.

Pertanto la teoria delle stringhe non è capace di descrivere i fermioni, e per questo viene definita *teoria delle stringhe bosoniche*.

Per risolvere questo problema si è fatto uso della cosiddetta *supersimmetria* (SUSY) [4], cioè di una simmetria estesa (cioè in più rispetto al gruppo di Poincaré) che permette di unificare “materia” (cioè fermioni) e “forza” (cioè bosoni).

La teoria risultante è stata definita *teoria delle stringhe supersimmetriche*, o *teoria delle superstringhe*, ed è sempre una teoria in prima quantizzazione.

Comunque la supersimmetria non è una prerogativa della teoria delle stringhe, in quanto anche per la particella puntiforme si può scrivere una teoria supersimmetrica.

Dato che abbiamo introdotto la supersimmetria, apriamo una parentesi, sottolineando innanzitutto il fatto che il numero di dimensioni D dello spaziotempo previsto dalla teoria delle stringhe bosoniche è diverso da quello previsto dalla teoria delle stringhe supersimmetriche.

Infatti la prima prevede $D=26$ (si veda il paragrafo 2.3), mentre la seconda prevede $D=10$ (si veda [4]).

Inoltre, avendo accennato a come sia possibile introdurre i fermioni nella teoria delle stringhe, formuliamo una domanda ovvia che ci si può porre: la teoria delle stringhe supersimmetriche permette di riottenere il Modello Standard?

Infatti abbiamo detto che la teoria delle stringhe supersimmetriche contiene sia le “forze” che le particelle di “materia”, ma non abbiamo specificato se la teoria delle stringhe prevede per questi campi lo stesso comportamento previsto dal Modello Standard.

In effetti si dimostra che la teoria delle stringhe porta a gruppi di gauge grandi abbastanza da includere il Modello Standard.

Dato che abbiamo spiegato il concetto delle extra dimensioni spaziali e quello delle D-brane, ora possiamo spiegare in che modo questo può essere verificato.

Nella teoria delle stringhe si studiano alcuni modelli che fanno uso delle D-brane e che hanno una misteriosa somiglianza al mondo così come noi lo conosciamo.

In questi modelli il contenuto di particelle è infatti *precisamente* quello del Modello Standard, però le particelle sono ottenute con masse nulle, e non è chiaro se il processo che dà a loro massa possa funzionare correttamente.

Inoltre la teoria delle stringhe non ha parametri liberi, cioè non ha costanti aggiustabili in seguito all’osservazione sperimentale (a differenza del Modello Standard, nel quale per esempio non si sa cosa determina i parametri nella lagrangiana) [2].

Il nostro mondo 4-dimensionale è parte delle D-brane, ma queste D-brane in generale hanno più di tre dimensioni spaziali.

Le dimensioni addizionali delle D-brane sono avvolte sullo spazio compatto.

Dalle vibrazioni delle stringhe aperte che sono collegate tra le D-brane emergono i bosoni di gauge (cioè tutte le forze fondamentali ad eccezione di quella gravitazionale) e le particelle di materia, che sono proprio le particelle contenute nel Modello Standard.

Chiusa questa parentesi, analizziamo ora il secondo problema della teoria delle stringhe (bosoniche).

Abbiamo detto che la stringa nel suo spettro ha infinite particelle.

Lo stato di energia più bassa della stringa si dimostra (nel paragrafo 2.4) che presenta massa al quadrato negativa, cioè massa immaginaria.

Una tale particella quindi dovrebbe propagare ad una velocità maggiore di quella della luce, il che non ha senso.

Pertanto una tale particella non può esistere, e quindi il fatto che essa venga invece prevista dalla teoria delle stringhe rappresenta una patologia della teoria stessa.

Una particella di questo tipo viene detta *tachione*, e deve essere allora eliminata dalla teoria.

Per risolvere questo problema si ipotizza che la comparsa del tachione nello spettro sia dovuta al fatto che lo stato di vuoto della stringa (cioè lo stato fondamentale, ovvero lo stato di minima energia) sia stato identificato incorrettamente.

Cioè si può pensare che il vuoto della teoria delle stringhe, presentando una massa al quadrato negativa, sia in realtà uno stato instabile, e che esista qualche altro vuoto stabile che non dia origine a tachioni.

Questa idea è stata suggerita dalla teoria di Higgs sulla rottura spontanea della simmetria, idea che si trova in molti esempi in fisica dello stato solido e che in teoria dei campi viene introdotta al fine di dare massa ai bosoni mediatori della forza nucleare debole (si veda il paragrafo 3.1).

Pertanto, in base a questa idea, per eliminare il tachione dallo spettro della stringa bisogna innanzitutto calcolare il potenziale del tachione, vedere se questo potenziale ha un punto di massimo ed uno di minimo, ed infine vedere se lo stato di vuoto della teoria delle stringhe corrisponde al punto di massimo di tale potenziale.

Se così fosse, allora il punto di massimo sarebbe on-shell, mentre il punto di minimo sarebbe off-shell.

Pertanto, al fine di costruire una teoria il cui stato di vuoto sia il punto di minimo del potenziale, bisogna usare una teoria che sia formulata off-shell.

Siccome un metodo noto per studiare i fenomeni off-shell è la teoria di campo, si è pensato di riformulare la teoria delle stringhe attraverso la teoria di campo appunto, cioè in seconda quantizzazione.

La teoria risultante è nota pertanto come *teoria di campo di stringa* (string field theory).

La prima formulazione della teoria di campo di stringa fu realizzata da Edward Witten nel 1986, e prende il nome di *cubic string field theory*.

Questa teoria non permette di ottenere dei risultati esatti, ma solo dei risultati a vari livelli di approssimazione (come spiegato nel paragrafo 3.2).

Quello che è interessante è determinare le soluzioni, dette *soluzioni di rolling*, che descrivono temporalmente il decadimento del tachione dal punto di massimo a quello di minimo del suo potenziale, processo che è definito *condensazione tachionica*.

Comunque la cubic string field theory viene formulata introducendo a priori una metrica di spaziotempo, e quindi non è una teoria indipendente dal background.

Questo, secondo alcuni fisici, è un difetto della teoria, alla luce della scoperta effettuata da Einstein, attraverso la relatività generale, che un'entità fisica è localizzata solamente rispetto ad un'altra entità fisica e non rispetto alla varietà dello spaziotempo (come spiegato nel paragrafo 4.1).

Pertanto, attorno agli anni '92-'93, Witten propose [5] un'altra formulazione della teoria di campo di stringa aperta, che fosse indipendente dal background.

Questa teoria pertanto è stata chiamata *background independent open string field theory*, ed è quella di cui ci dedicheremo nell'ambito di questa tesi.

Bisogna sottolineare il fatto che questa teoria non è comunque priva di problemi, dato che non è rinormalizzabile per campi massivi.

Il problema del tachione esiste anche nella teoria delle stringhe supersimmetriche in prima quantizzazione (maggiori dettagli al riguardo sono riportati nel paragrafo 3.1), della quale però non ci occuperemo.

Anche la teoria supersimmetrica può essere riformulata in seconda quantizzazione, sia attraverso la cubic string field theory che attraverso la background independent open string field theory.

Dato che la teoria bosonica non contiene i fermioni mentre quella supersimmetrica sì, è chiaro che la teoria che ambisce a descrivere la realtà in modo corretto è la seconda.

Ciononostante, in questa tesi ci dedicheremo allo studio della condensazione tachionica nel caso della teoria bosonica, perchè capire cosa succede nel caso bosonico potrà aiutare a capire anche il caso supersimmetrico.

Nell'ambito della teoria di campo di stringa, sia per la stringa bosonica che per quella supersimmetrica, furono formulate da Ashoke Sen [6] tre congetture.

Siccome noi siamo interessati al caso della stringa bosonica, riportiamo le tre congetture in questo ambito:

- 1) Il potenziale effettivo del tachione $V(T)$ (definito al paragrafo 3.2) ha un minimo locale in qualche punto $T=T_0$, e in questo punto di minimo la tensione \mathcal{T}_p della D-brana originale è esattamente cancellata dal valore negativo $V(T_0)$ del potenziale:

$$V(T_0) + \mathcal{T}_p = 0.$$

- 2) Siccome la densità di energia totale si annulla a $T=T_0$, è naturale identificare la configurazione $T=T_0$ come il vuoto senza alcuna D-brana. Questo implica che non ci sono stati fisici perturbativi di stringa aperta attorno al minimo del potenziale.
- 3) Sebbene non ci siano stati fisici perturbativi attorno al minimo del potenziale, le equazioni del moto ricavate dall'azione effettiva del tachione devono avere soluzioni *di tipo solitonico* (lump solutions) classiche indipendenti dal tempo e non banali di varie codimensioni. Una soluzione solitonica di codimensione q su una D_p -brana, per la quale T dipende da q coordinate spaziali e tende a T_0 quando ciascuna di queste q coordinate tende all'infinito, rappresenta una $D-(p-q)$ -brana della teoria di stringa bosonica, a sua volta instabile nelle $(p-q)$ dimensioni rimanenti.

Spieghiamo ora il significato di queste tre congetture.

Per quanto riguarda la prima congettura, osserviamo che quando il tachione T si trova nello stato di massimo del suo potenziale, esso rappresenta l'instabilità della D_p -brana sulla quale esso si trova.

In questo stato, l'unica (densità di) energia del sistema disponibile è la tensione della D_p -brana (abbiamo detto che p dipende dal numero di condizioni di Neumann che abbiamo usato inizialmente per la stringa aperta. Solitamente si considera una D_{25} -brana, perchè questa ha energia maggiore rispetto alle D_p -brane di dimensione inferiore e quindi durante la condensazione tachionica può trasformarsi in tali D-brane, mentre al contrario una D_p -brana non può acquisire energia per trasformarsi in una D-brana di dimensione maggiore).

Quello che afferma la prima congettura è che quando il tachione condenserà nel punto di minimo del suo potenziale, il contributo negativo di energia del potenziale tachionico associato al rotolamento del tachione cancella esattamente la densità di energia positiva (cioè la tensione) della D_p -brana.

Da qui si comprende il significato della seconda congettura.

Infatti, a causa della cancellazione della densità di energia della D_p -brana appena detta, si capisce che nel punto di minimo del potenziale tachionico non ci possono più essere D-brane.

Siccome gli stati di stringa aperta vivono solamente sulle D-brane, come spiegato precedentemente, ne segue che nel punto di minimo del potenziale non ci possono essere stringhe aperte.

Siccome le stringhe aperte contengono i campi di gauge nel loro spettro (come mostrato al paragrafo 2.4), si potrebbe pensare che dopo la condensazione tachionica non esitano le forze elettromagnetica, nucleare forte e nucleare debole.

In realtà questo non è vero: quello che si ottiene è che queste tre forze devono ricomparire dalle eccitazioni di stringa chiusa costruite a partire dal punto di minimo del potenziale.

Infine, la terza congettura dice innanzitutto che le equazioni del moto del tachione devono avere delle soluzioni di tipo solitonico.

Un solitone costituisce un particolare tipo di onda solitaria, cioè un particolare tipo di onda che mantiene inalterata la sua forma durante il moto libero.

Se per di più l'onda solitaria mantiene inalterata la sua forma dopo la collisione con un'altra onda solitaria, allora essa viene detta solitone.

Un solitone viene detto di codimensione q se esso dipende solamente da q coordinate spaziali.

Quindi la terza congettura di Sen termina dicendo che un solitone di codimensione q che si propaga su una D_p -brana presenta le stesse caratteristiche di una $D_{(p-q)}$ -brana e quindi può essere interpretato come una $D_{(p-q)}$ -brana.

Lo scopo di questa tesi è di dimostrare la prima e la terza congettura di Sen e di ricavare una particolare soluzione di rolling, nell'ambito della background independent open string field theory.

Invece la seconda congettura di Sen viene studiata nella cosiddetta *vacuum string field theory*, un'area della fisica così vasta da non permetterci di analizzarla in questa tesi.

Qui ci occuperemo solamente di dimostrare che nel punto di minimo del potenziale non esiste lo stato tachionico, il che dimostra solo in parte la seconda congettura.

Siccome dobbiamo formulare le teorie di campo di stringa, dobbiamo ovviamente spiegare i concetti di campo e di stringa (in prima quantizzazione) separatamente prima di inglobarli nella stessa teoria, la teoria di campo di stringa appunto, cioè la teoria delle stringhe in seconda quantizzazione.

Pertanto ora cominceremo con l'espone la teoria dei campi (capitolo 1), proseguiremo con l'espone la teoria delle stringhe in prima quantizzazione (capitolo 2) e termineremo con l'espone le teorie di campo di stringa e la condensazione tachionica (capitoli 3 e 4).

CAPITOLO 1: LA TEORIA DEI CAMPI

1.1 INTRODUZIONE

Nell'introduzione generale abbiamo visto che la teoria dei campi è nata negli anni '20 allo scopo di descrivere sistemi formati da un numero di particelle non costante e particelle microscopiche che si muovono a velocità molto elevate.

Infatti, prima di allora, le uniche teorie esistenti erano la teoria della relatività speciale (oltre a quella della relatività generale), che descrive classicamente (come si vede dal fatto che questa teoria non dipende dalla costante di Planck) dei corpi che si muovono a velocità molto elevate (relativistiche appunto), e la teoria della meccanica quantistica, la quale descrive oggetti microscopici che si muovono a velocità non relativistiche (come si vede dal fatto che la teoria non è relativisticamente invariante).

Quindi, per descrivere particelle microscopiche che si muovono a velocità relativistiche, è necessario trovare una unificazione della relatività speciale e della meccanica quantistica, cioè trovare una teoria della meccanica quantistica relativistica.

I primi tentativi fatti per unificare queste due teorie consistevano nel trovare la generalizzazione covariante dell'equazione di Schrodinger della particella puntiforme (la quale infatti non è covariante, come si vede dal fatto che non tratta il tempo e lo spazio allo stesso modo, dato che essa contiene la derivata prima nel tempo e derivate seconde nello spazio).

Il primo tentativo fu quello che portò all'*equazione di Klein-Gordon*:

$$\left(\square^2 - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \Psi = 0, \quad \text{dove} \quad \square^2 \equiv -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2, \quad (1.1.1)$$

dove ψ rappresenta la funzione d'onda della particella puntiforme di massa m .

Questa equazione però presenta il problema di ammettere anche soluzioni ad energia negativa ed una densità di carica conservata che non è definita positiva e quindi non è interpretabile come densità di probabilità.

Per questi due problemi l'equazione di Klein-Gordon venne abbandonata (ma fu successivamente recuperata in un contesto completamente diverso, cioè nella teoria dei campi).

Fu allora proposto un altro tentativo, da P. A. M. Dirac, il quale sospettò che la densità di carica dell'equazione di Klein-Gordon non fosse definita positiva a causa della presenza delle derivate seconde in tale equazione.

Pertanto Dirac cercò una generalizzazione covariante dell'equazione di Schrodinger che fosse lineare, cioè che contenesse solo derivate prime, e che iterata desse l'equazione di Klein-Gordon.

L'equazione che Dirac trovò è:

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0_2 \end{pmatrix}, \quad i=1,2,3, \quad (1.1.2)$$

(dove I_2 rappresenta la matrice identità 2×2 , O_2 la matrice nulla 2×2 , e σ^i le matrici di Pauli) nota appunto come *equazione di Dirac*.

Ora ψ è una matrice colonna a quattro elementi:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (1.1.3)$$

e viene detto *bi-spinore* o *spinore di Dirac* (sebbene esso porti quattro componenti, questo oggetto NON è un quadrivettore).

Si dimostra che la densità di corrente associata all'equazione di Dirac è definita positiva.

Pertanto essa può essere interpretata come densità di probabilità (e non come densità di carica elettrica).

Questo è un primo successo dell'equazione di Dirac.

Inoltre, se si accoppia l'equazione di Dirac con un campo elettromagnetico e se ne prende il limite non relativistico, si ottiene l'equazione di Schrodinger accoppiata con il campo elettromagnetico e con il giusto fattore di Landau g_S per le particelle di spin $1/2$, cioè $g_S=2$: questo rappresenta quindi un altro successo dell'equazione di Dirac.

Però l'equazione di Dirac, così come quella di Klein-Gordon, presenta il problema di avere delle soluzioni con $E<0$.

Se un elettrone (per esempio) può assumere degli stati di energia negativa, a causa della naturale tendenza di ciascun sistema ad evolvere nella direzione di minima energia, ne seguirebbe che l'elettrone evolverebbe a stati di energia sempre più al di sotto dello zero e quindi irradierebbe una infinità di energia in questo processo, il che è assurdo.

Si era restii a ritenere che questo fosse un problema, dato che l'equazione per il resto funzionava bene.

Allora, per salvare la sua equazione, Dirac postulò che gli stati ad energia negativa fossero tutti riempiti da un "mare" infinito di elettroni, detto appunto *mare di Dirac*.

Poichè questo mare è sempre presente, e perfettamente uniforme, esso non esercita alcuna forza su niente, e per questo noi non siamo consapevoli della sua esistenza.

Dirac allora invocò il principio di esclusione di Pauli per “spiegare” perchè gli elettroni che noi osserviamo sono confinati a stati di energia positiva.

Infatti, per il principio di esclusione di Pauli (che è valido solamente per i fermioni, ma i fermioni sono proprio le particelle descritte dall'equazione di Dirac, in base a quanto detto precedentemente sul fattore di Landau g_s) in ogni stato c'è una sola particella e pertanto una particella con $E > 0$ non può decadere in uno stato con $E < 0$.

Ma se questo fosse vero, cosa succederebbe quando impartiamo ad uno degli elettroni nel mare un'energia sufficiente a saltare in uno stato di energia positiva?

L'assenza dell'elettrone nel mare verrebbe interpretata come una carica positiva in quel punto, e l'assenza della sua energia negativa verrebbe interpretata come un'energia positiva.

Quindi una “lacuna nel mare” verrebbe interpretata come un'ordinaria particella con energia positiva e carica positiva.

Inizialmente Dirac sperò che queste lacune potessero essere protoni, ma fu subito capito che esse dovevano portare la stessa massa dell'elettrone (che è 2000 volte più leggero del protone).

Una particella del genere non era nota a quel tempo, e quindi la teoria di Dirac era in difficoltà.

Quello che nel 1930 sembrava un difetto fatale, nel tardo 1931 divenne un trionfo spettacolare, con la scoperta del *positrone* da parte di Anderson.

Il positrone è il gemello positivamente carico dell'elettrone.

Comunque a molti fisici non piaceva l'idea di essere immersi in un mare infinito di elettroni invisibili, e così negli anni '40 Stuckelberg e Feynman trovarono un'interpretazione molto più semplice degli stati di energia negativa.

Nella formulazione di Stuckelberg-Feynman le soluzioni ad energia negativa sono riesprese come stati ad energia positiva di una *particella differente*, detta *antiparticella* ; l'elettrone e la sua antiparticella, cioè il positrone, appaiono così sullo stesso piano (e cioè entrambe si trovano nella regione di $E > 0$), e non c'è bisogno del mare di elettroni di Dirac o delle sue misteriose lacune.

Quindi questa formulazione dice di interpretare le particelle ad energia negativa (che si propagano indietro nel tempo) come antiparticelle di energia positiva (che si propagano in avanti nel tempo).

In generale un'antiparticella è identica alla corrispondente particella, ma con tutti i numeri quantici cambiati di segno.

Quindi la formazione della lacuna nel mare di Dirac in questa formulazione viene reinterpretata come la formazione di una coppia particella-antiparticella.

Invece il ritorno della particella nella buca viene reinterpretato come l'annichilazione di essa con la corrispondente antiparticella.

Quindi l'unione della meccanica quantistica con la relatività speciale porta alla previsione teorica dell'antimateria, che compare nella teoria in modo simmetrico rispetto alla materia ordinaria.

Furono poi osservate sperimentalmente anche antiparticelle di tipo bosonico, per le quali, come abbiamo detto, l'idea del mare di Dirac non era applicabile, dato che per esse non vale il principio di esclusione di Pauli e quindi esse potrebbero condensare in un livello con $E < 0$.

Inoltre abbiamo detto che l'equazione di Dirac descrive solamente particelle a spin $\frac{1}{2}$, e quindi certamente non può descrivere dei bosoni.

Tutti questi problemi sono stati risolti dalla cosiddetta *teoria dei campi*, che è la formulazione moderna della meccanica quantistica relativistica appena esposta.

1.2 LA TEORIA DI CAMPO CLASSICA

Il concetto di campo è qualcosa di nuovo rispetto alla trattazione del paragrafo 1.1 e viene usato per formulare una teoria che sia relativisticamente invariante e che contenga i principi della meccanica quantistica per la particella puntiforme.

Tuttavia il concetto di campo è indipendente dalla meccanica quantistica e quindi conviene fornire dapprima una spiegazione del concetto di campo nell'ambito della teoria classica, cioè nell'ambito di una teoria che sia relativisticamente invariante ma non quantistica.

Il passaggio da fare per definire la teoria di campo classica è quello che si fa in meccanica analitica classica quando si passa da un sistema con un numero finito di gradi di libertà a un sistema con infiniti gradi di libertà come un sistema continuo.

Il metodo più diretto per fare il passaggio è quello di schematizzare il continuo discretizzandolo, dividendolo come se fosse costituito da un numero discreto di parti (anche infinito, ma numerabile per poter applicare il formalismo usuale) per passare poi al continuo facendo un limite.

Come esempio di tale passaggio, che comunque ci darà tutti i tratti salienti del discorso, prendiamo una sbarra elastica della quale consideriamo solo vibrazioni trasversali; un sistema che la approssima può essere una catena di masse puntiformi m separate da una distanza fissa a e collegate fra loro da molle ideali di costante elastica k che si muovono solo nella direzione della catena (prendiamo cioè, per semplicità, un sistema unidimensionale).

Dalla lagrangiana di questo sistema discreto:

$$L = a \sum_i \left[\frac{m}{a} \left(\frac{d\eta_i}{dt} \right)^2 - \frac{k}{a} (\eta_i - \eta_{i+1})^2 \right] = \sum_i a \mathcal{L}_i \quad (1.2.1)$$

dove \mathcal{L}_i è la lagrangiana per unità di lunghezza, vengono ricavate (attraverso le equazioni di Eulero-Lagrange) le seguenti equazioni del moto:

$$\frac{m}{a} \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} - ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a^2} \right) + ka \left(\frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a^2} \right) = 0 \quad (1.2.2)$$

Queste sono infinite equazioni accoppiate.

Adesso si vuol vedere cosa ci danno nel caso del limite continuo per $a \rightarrow 0$.

Evidentemente m/a tende alla densità di massa per unità di lunghezza μ .

Invece ka , ricordando la legge di Hooke dell'allungamento della sbarra, tende al modulo di Young Y .

Per cui alla fine dal limite per $a \rightarrow 0$ della (1.2.2) si ottiene l'equazione:

$$\mu \frac{d^2 \eta(x,t)}{dt^2} - Y \frac{d^2 \eta(x,t)}{dx^2} = 0, \quad (1.2.3)$$

che è l'equazione delle onde elastiche nella sbarra.

Sempre nel limite di $a \rightarrow 0$ otterremo che la lagrangiana può essere scritta in termini della densità di lagrangiana (1.2.1) come:

$$L = \sum_i a \left[\frac{m}{a} \left(\frac{d\eta_i}{dt} \right)^2 - ka \left(\frac{\eta_i - \eta_{i+1}}{a} \right)^2 \right] \rightarrow L(t) = \int dx \left[\mu \left(\frac{d\eta(x,t)}{dt} \right)^2 - Y \left(\frac{d\eta(x,t)}{dx} \right)^2 \right] = \int dx \mathcal{L}.$$

(1.2.4)

Questo semplice esempio ci mostra già i punti salienti del passaggio da un sistema discreto ad uno continuo, passaggio che resterà valido anche nella quantizzazione.

Il fatto più importante da capire è il nuovo ruolo che viene a svolgere la coordinata di posizione x : essa non è più una variabile canonica del sistema, ma serve solamente come indice continuo al posto dell'indice discreto i .

Le coordinate generalizzate del sistema sono invece le $\eta(x)$ relative a ciascun x che corrispondono alle discrete η_i (ovviamente questo esempio può poi essere generalizzato al caso di tre dimensioni spaziali).

La $\eta(x)$ è un esempio di quello che viene definito *campo classico*.

Altri esempi di campi sono la temperatura in ciascun punto di una stanza, il potenziale elettrico V , o le tre componenti di un campo magnetico \mathbf{B} .

In ogni caso il campo occupa una qualche regione dello spazio e viene indicato in modo generale con il simbolo $\phi(\mathbf{x}, t)$.

Si possono poi considerare sistemi nei quali esistono più campi assieme.

L'esempio mostrato appartiene all'ambito della meccanica classica non-relativistica.

Per estendere questo discorso al caso della meccanica classica relativistica, dobbiamo considerare una generica densità di lagrangiana al più quadratica nei campi (al fine di avere equazioni del moto lineari) e della forma:

$$\mathcal{L} [\phi(x), \partial_\mu \phi(x)] \quad (1.2.5)$$

(dove $x = x^\mu = (ct, x, y, z)$).

Infatti, visto che vogliamo effettuare l'estensione al caso relativistico, la densità di lagrangiana deve essere relativisticamente invariante, cioè deve essere invariante sotto le trasformazioni di Poincaré e di Lorentz nello spaziotempo 4-dimensionale (cioè deve essere uno scalare).

In effetti, se \mathcal{L} dipendesse solamente da una delle derivate del campo (per esempio solo quella rispetto al tempo), ci sarebbe rotta la simmetria tra le variabili spaziali e quella temporale, che invece è richiesta in una teoria relativistica.

Inoltre, dato che \mathcal{L} deve essere uno scalare, essa dovrà dipendere da $\partial_\mu \phi$ attraverso la combinazione $(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi)$ (tale combinazione è l'unica possibile per formare uno scalare partendo da $\partial_\mu \phi$).

Infine, \mathcal{L} può dipendere esplicitamente dalle coordinate x^μ solamente nel caso in cui agiscano sul sistema delle forze esterne.

In generale, se considereremo solo campi liberi o al più interagenti fra di loro, l'omogeneità ed isotropia dello spazio e del tempo ci permette di escludere questa dipendenza che automaticamente privilegierebbe istanti e coordinate particolari.

Cioè, nel caso di campi liberi o al più interagenti fra di loro, \mathcal{L} non può dipendere esplicitamente dalle coordinate x^μ perchè da esse si possono costruire solo degli invarianti di Lorentz, ma non di Poincaré.

Quindi la (1.2.5) è la densità di lagrangiana relativisticamente invariante più generale possibile.

Le equazioni di Eulero-Lagrange della meccanica newtoniana contengono solamente la derivata temporale, ma una teoria relativistica deve trattare lo spazio ed il tempo allo stesso modo.

Pertanto le equazioni di Eulero-Lagrange della meccanica newtoniana vengono generalizzate nel seguente modo:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}, \quad (1.2.6)$$

(dove è sottintesa la somma su μ) per ognuno dei campi ϕ del sistema considerato.

Un campo, sotto trasformazione di Lorentz, può trasformarsi come uno scalare, uno spinore, un vettore od un tensore.

Consideriamo per esempio il caso in cui si trasformi come uno scalare.

In tal caso la sua densità di lagrangiana deve necessariamente essere della forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi(x))(\partial_\mu\phi(x)) - V(\phi). \quad (1.2.7)$$

L'equazione del moto che si ricava da questa densità di lagrangiana, nel caso di campi liberi, è:

$$(\square^2 + m^2)\phi = 0 \quad (1.2.8)$$

(dove $m^2/2$ è il coefficiente che moltiplica ϕ^2 nello sviluppo in serie di Taylor del potenziale $V(\phi)$), che ha esattamente la stessa forma dell'equazione di Klein-Gordon (vedere la (1.1.1)) della meccanica quantistica relativistica.

Invece l'equazione di Dirac (vedere la (1.1.2)) è la giusta equazione del moto per un campo spinoriale, ma a livello classico non fornisce dei risultati accettabili (per esempio perchè comporta una carica elettrica definita positiva): questo succede poichè l'equazione di Dirac è intrinsecamente quantistica e quindi deve essere quantizzata sin dall'inizio, cioè non può essere analizzata a livello classico, a meno di non considerare i campi spinoriali come variabili anticommutanti di Grassmann.

Per una descrizione più dettagliata della definizione moderna di campo per la particella puntiforme, vedere l'appendice A.1.

1.3 LA TEORIA DI CAMPO QUANTISTICA

Nella fisica classica (relativistica o non-relativistica) e nella fisica quantistica non relativistica, il numero totale delle particelle elementari (cioè non formate da altre particelle) coinvolte in un processo si conserva.

Invece in fisica quantistica relativistica questo numero non si conserva: questo è dovuto alla collaborazione dei principi della meccanica quantistica con la legge di Einstein $E=mc^2$.

Infatti, se una particella ha energia maggiore dell'energia di massa a riposo, si possono formare delle coppie particella-antiparticella e quindi il numero totale di particelle nel processo non si è conservato.

Nella meccanica quantistica non-relativistica (che è descritta da una funzione d'onda ψ) questo fenomeno non si verifica e pertanto la funzione d'onda non è appropriata per descrivere un processo in cui il numero totale di particelle non si conserva.

Per poter descrivere correttamente questo processo, si deve effettuare la quantizzazione del campo classico $\phi(\mathbf{x},t)$.

Questa è chiamata *seconda quantizzazione*.

Per capire il perchè di questo nome, basta osservare per esempio che l'equazione del moto (1.2.8) che descrive una particella scalare puntiforme è della forma dell'equazione di Klein-Gordon, che per quanto visto nel paragrafo 1.1 contiene già i principi della meccanica quantistica.

Quindi è come se andassimo a quantizzare qualcosa che già è quantistico, da cui il nome di seconda quantizzazione.

Ora vogliamo spiegare perchè per descrivere correttamente la non conservazione del numero totale di particelle si deve effettuare la quantizzazione di un campo.

Consideriamo come esempio sempre il caso della particella scalare.
La soluzione della (1.2.8) (che è classica) è:

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \left[a(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + a^*(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right]. \quad (1.3.1)$$

Per quantizzare questo sistema, bisogna promuovere le funzioni $a(\mathbf{k})$ ed $a^*(\mathbf{k})$ ad operatori:

$$\hat{\phi}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \left[\hat{a}(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right]. \quad (1.3.2)$$

Siccome vogliamo inglobare l'informazione dei principi quantistici, esse dovranno soddisfare la regola di commutazione di Heisenberg:

$$\left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}') \right] = (2\pi)^3 2\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (1.3.3)$$

Postuliamo poi l'esistenza di uno stato $|0\rangle$, detto *stato di vuoto*, che viene annichilato da tutti gli operatori $\hat{a}(\mathbf{k})$.

Gli operatori sono quelli che vengono definiti *operatori di creazione e distruzione* rispettivamente. Essi sono molto simili agli operatori di creazione e distruzione che vengono introdotti nella trattazione algebrica dell'oscillatore armonico in meccanica quantistica non-relativistica ordinaria, ma hanno un'importante differenza.

Nel caso della teoria dei campi essi non servono per aumentare o diminuire l'autovalore dell'hamiltoniana del sistema (come invece si ha per l'oscillatore armonico quantistico), bensì servono per creare e distruggere particelle.

Nella teoria dei campi lo stato di vuoto $|0\rangle$ rappresenta uno stato nel quale non esistono particelle (mentre nell'oscillatore armonico quantistico si ha come punto di partenza lo stato fondamentale dell'oscillatore, che rappresenta lo stato di minima energia del sistema), ed applicandovi gli operatori di creazione si creano particelle, mentre con gli operatori di distruzione si distruggono particelle.

Quindi, una volta effettuata la seconda quantizzazione della teoria di campo classica, si ottiene uno strumento che permette di aumentare o ridurre il numero totale delle particelle del sistema, che era proprio quello che volevamo.

Questo spiega perchè la teoria di campo è efficace nella descrizione delle particelle che si muovono a velocità relativistiche obbedendo alle regole della meccanica quantistica.

Per quanto riguarda invece le particelle spinoriali, la seconda quantizzazione deve essere effettuata attraverso degli anticommutatori (teorema di spin-statistica):

$$\begin{aligned} \left\{ a_s^{*-}(\vec{k}), a_{s'}^+(\vec{k}') \right\} &= \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), \\ \left\{ a_s^-(\vec{k}), a_{s'}^{*+}(\vec{k}') \right\} &= \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

dove a_s^+ ed a_s^{*-} sono rispettivamente il creatore e distruttore di particelle con spin $s = \mp 1/2$, mentre a_s^{*+} ed a_s^- sono rispettivamente il creatore e distruttore di antiparticelle di spin $\pm 1/2$.

Nella teoria dei campi quantistica, la probabilità che uno stato iniziale $|IN\rangle$ evolva in uno stato finale $|OUT\rangle$ è data da:

$$|\langle OUT|IN\rangle|^2 = |\langle IN|\hat{S}|IN\rangle|^2, \quad (1.3.5)$$

dove S qui rappresenta la cosiddetta *matrice di scattering*.

Nella teoria di campo gli stati iniziali e finali sono on-shell perchè devono descrivere particelle fisiche.

Per il resto nelle teorie di campo tutto è off-shell (come si può vedere dal fatto che tutto è calcolato integrando su tutti i possibili valori del momento), ma poi infine viene reso on-shell perchè si fa saturare la matrice di scattering con gli stati iniziali e finali, i quali sono on-shell.

1.4 LA TEORIA DI CAMPO IN PRIMA QUANTIZZAZIONE

La fisica delle particelle puntiformi può essere descritta anche senza far ricorso ai campi come mostrato nel paragrafo 1.3, grazie alla cosiddetta formulazione in *prima quantizzazione*.

Di seguito esponiamo tale formulazione, poichè una volta estesa al caso di oggetti monodimensionali essa darà origine alla teoria delle stringhe in prima quantizzazione.

Una particella puntiforme muovendosi descrive una linea nello spaziotempo, che viene definita *world-line*.

In meccanica classica relativistica l'equazione del moto di una particella puntiforme è $d^2X^\mu/d\tau^2=0$, dove le X^μ rappresentano le coordinate spaziotemporali della particella (possiamo considerare $\mu=0, \dots, D-1$, con D generico), mentre τ il tempo proprio.

Questa equazione del moto può essere ricavata minimizzando la seguente azione:

$$S = m \int_{t_i}^{t_f} d\tau \sqrt{\frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau} \eta_{\mu\nu}}, \quad (1.4.1)$$

che è proporzionale alla lunghezza della world-line ed è invariante sotto traslazioni temporali.

Qui m rappresenta la massa della particella (e deve essere inserita nell'azione per ragioni dimensionali), mentre t_i e t_f rappresentano rispettivamente l'istante iniziale e quello finale del tratto di world-line considerato.

Il momento della particella è quindi:

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dX^\mu}{d\tau} \right)} = m \frac{1}{\sqrt{\frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX_\mu}{d\tau}}} \frac{dX_\mu}{d\tau}. \quad (1.4.2)$$

Da qui ne segue che:

$$p^2 = p_\mu p^\mu = m^2 \quad e \quad \text{quindi} \quad p^2 - m^2 = 0. \quad (1.4.3)$$

$p^2 - m^2 = 0$ rappresenta un vincolo (constraint).

Finora siamo solamente al livello classico e relativistico.

Ora invece vogliamo quantizzare la teoria (prima quantizzazione).

Indichiamo con il vettore di stato $|\psi\rangle$ della particella ed imponiamoli il vincolo $p^2 - m^2 = 0$, cioè:

$$(\hat{p}^2 - m^2 \hat{I})|\psi\rangle = 0, \quad \text{ovvero} \quad (\square^2 + m^2 \hat{I})|\psi\rangle = 0 \quad (1.4.4)$$

(avendo usato il fatto che $p_\mu = i\hbar \partial / \partial x^\mu$ a livello quantistico e che $\square^2 = \eta^{\mu\nu} (\partial^2 / \partial x^\mu \partial x^\nu)$).

Applicando ora il covettore $\langle x|$, dove x rappresenta la posizione della particella, la (1.4.4) diventa:

$$\langle x|(\square^2 + m^2 \hat{I})|\psi\rangle = 0, \quad \text{ovvero} \quad (\square^2 + m^2)\psi(x) = 0, \quad (1.4.5)$$

dove $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ rappresenta la funzione d'onda della particella, e non il campo della particella: è questa la differenza fondamentale tra prima e seconda quantizzazione.

Da quanto esposto finora si vede che volendo possiamo interpretare la formulazione in prima quantizzazione come una teoria di campo in una dimensione (quella della world-line della particella puntiforme), mentre invece la formulazione in seconda quantizzazione è una teoria di campo in quattro dimensioni (quelle dello spaziotempo).

Osserviamo che interpretando la funzione d'onda $\psi(x)$ (e cioè la formulazione in prima quantizzazione) come un campo scalare $\phi(x)$ (e cioè formulazione in seconda quantizzazione), l'equazione (1.4.5) diventa l'equazione di Klein-Gordon della teoria dei campi.

In tal modo la funzione d'onda $\psi(x)$ diventa un campo $|\phi\rangle$, che è dato dall'applicazione degli operatori di creazione e distruzione su uno stato di vuoto.

L'analogia $\psi(x) \rightarrow |\phi\rangle$ non è solo formale, come mostrato in [7].

In prima quantizzazione l'azione della particella puntiforme è la (1.4.1), mentre in seconda quantizzazione è data dall'integrazione della (1.2.5) sulle coordinate spaziotemporali.

Per lo studio del sistema, servono i propagatori ed i vertici d'interazione.

Questi vengono determinati dall'azione in seconda quantizzazione.

Consideriamo il propagatore, nel caso di $m=0$ per semplicità, osservando che:

$$G(x_f - x_i) = \int [D\psi] \psi(x_f) \psi(x_i) e^{iS[\psi]} = \langle x_f | \frac{1}{\square^2} | x_i \rangle = \langle x_f | \left(\int_0^{+\infty} d\tau e^{-\tau \square^2} \right) | x_i \rangle = \int_0^{+\infty} d\tau \langle x_f | e^{-\tau \square^2} | x_i \rangle,$$

(1.4.6)

dove $S[\psi]$ è l'azione in seconda quantizzazione.

Osserviamo ora che l'integrando è proprio l'operatore che propaga la particella in prima quantizzazione attraverso il tempo proprio immaginario τ (cioè è come se fosse stata effettuata una rotazione di Wick).

Ne segue allora che esso può essere espresso attraverso un path-integral e quindi la (1.4.6) diventa:

$$G(x_f - x_i) = \int_0^{+\infty} dt \langle x_f | e^{-\tau \square^2} | x_i \rangle = \int_0^{+\infty} d\tau \int_{x_i}^{x_f} [Dx] e^{-S(\tau)}, \quad (1.4.7)$$

dove $S(\tau)$ è la (1.4.1).

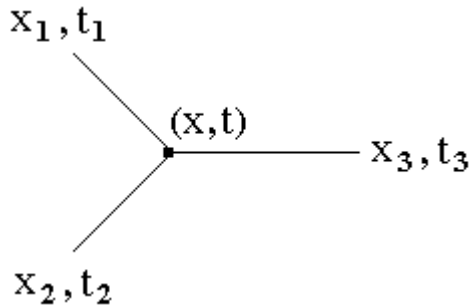
Quindi abbiamo espresso il propagatore in seconda quantizzazione partendo dal propagatore in prima quantizzazione.

Per quanto riguarda invece le interazioni, nel formalismo in seconda quantizzazione sappiamo che esse vengono ricavate automaticamente dall'azione in seconda quantizzazione.

Invece nel formalismo in prima quantizzazione esse devono essere inserite a mano nella teoria.

Cioè nel formalismo in prima quantizzazione dobbiamo decidere noi quante sono le particelle interagenti nel vertice, poichè nella lagrangiana in prima quantizzazione (cioè l'integrando della (1.4.1)) non ci sono termini analoghi ai termini d'accoppiamento tra campi che si hanno invece nella lagrangiana in seconda quantizzazione.

Se decidiamo di avere dei vertici d'interazione del tipo:



che, attraverso le regole di Feynman, contribuiscono all'ampiezza di processo con:

$$\int d^{D-1} x dt \langle x_1, t_1 | x, t \rangle \langle x_2, t_2 | x, t \rangle \langle x, t | x_3, t_3 \rangle, \quad (1.4.8)$$

allora possiamo determinare propagatori e vertici.

1.5 INTRODUZIONE DI EXTRA DIMENSIONI SPAZIALI NELLA TEORIA DEI CAMPI

Nelle teorie di campo il numero d di dimensioni spaziali viene fissato "a mano".

Cioè nelle teorie di campo non emerge (né a livello classico né a livello quantistico) che il numero di dimensioni spaziali debba assumere un certo valore determinato al fine di garantire la consistenza interna della teoria, e quindi qualsiasi valore di d è possibile.

Ma visto che sperimentalmente si osserva che $d=3$, questo è il valore che viene scelto per le teorie di campo.

Però, in relatività generale, la geometria dello spazio-tempo è dinamica.

Le tre dimensioni spaziali che noi vediamo si stanno espandendo ed una volta erano altamente curvate.

È quindi una possibilità logica che esistano dimensioni spaziali aggiuntive che rimangono piccole.

Questa idea fu utilizzata per la prima volta nel 1914 allo scopo di unificare il campo elettromagnetico con quello gravitazionale come componenti di un singolo campo di dimensione maggiore.

Questa teoria è nota come *teoria di Kaluza-Klein* e fa uso di una dimensione spaziale aggiuntiva e periodica.

Di seguito riportiamo una generalizzazione di questa teoria al caso di d dimensioni spaziali (e quindi $D=d+1$ dimensioni spazio-temporali), con d arbitrario, dato che stiamo considerando una teoria di campo.

Ipotizziamo che solo la dimensione x^d sia periodica, con raggio di compattificazione R .

Indicando con G^D_{MN} la metrica di questa teoria, l'elemento di linea dello spazio risulta essere:

$$ds^2 = G^D_{MN} dx^M dx^N = G^D_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2G^D_{\mu d} dx^\mu dx^d + G^D_{dd} (dx^d)^2, \quad (1.5.1)$$

dove $M, N=0, \dots, d$ (cioè M, N corrono su tutte le dimensioni), mentre $\mu, \nu=0, \dots, d-1$ (cioè μ, ν corrono solamente sulle dimensioni non compattificate).

Possiamo parametrizzare la metrica G^D_{MN} di questa teoria nel seguente modo:

$$ds^2 = G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + G_{dd} (dx^d + A_\mu dx^\mu)^2 = (G_{\mu\nu} + G_{dd} A_\mu A_\nu) dx^\mu dx^\nu + 2G_{dd} A_\mu dx^\mu dx^d + G_{dd} (dx^d)^2,$$

(1.5.2)

dove $G_{\mu\nu}$ è un tensore di rango 2, A_μ un vettore e G_{dd} uno scalare.

Ne segue allora dal confronto con la (1.5.1) che:

$$G^D_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + G_{dd} A_\mu A_\nu \neq G_{\mu\nu}, \quad G^D_{\mu d} = G_{\mu d}, \quad G^D_{dd} = G_{dd}. \quad (1.5.3)$$

Vogliamo ora vedere gli effetti di una ipotetica dipendenza dei campi da x^d .

Consideriamo un campo scalare libero di massa nulla in D dimensioni, che indichiamo con ϕ , e poniamo per semplicità $G_{dd}=1$.

Il momento di ϕ nella dimensione periodica x^d è quantizzato: $p_d=n/R$, dove n rappresenta un generico numero intero.

Questo è dovuto al fatto che l'operatore $\exp(2\pi i R p)$ che trasla la particella di un giro attorno alla dimensione periodica deve lasciare invariati gli stati.

Siccome x^d è periodico e siccome $\phi(x^M)$ è fattorizzabile nel prodotto di una parte dipendente da x^μ e di una dipendente da x^d , ne segue che possiamo sviluppare in serie di Fourier la parte di $\phi(x^M)$ dipendente da x^d , ottenendo:

$$\phi(x^M) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n(x^\mu) \exp(inx^d/R). \quad (1.5.4)$$

Estendendo a $D=d+1$ dimensioni l'azione del campo, cioè ponendo:

$$S[\phi] = \int d^D x \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi \quad (1.5.5)$$

ed uguagliando a zero la sua variazione rispetto a ϕ , si ottiene la seguente equazione del moto $\partial_M \partial^M \phi = 0$.

Osserviamo ora che:

$$\partial_M \partial^M \phi = \partial_\mu \partial^\mu \phi + \partial_d \partial^d \phi = G^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + G^{dd} \partial_d \partial_d \phi = G^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \partial_d \partial_d \phi, \quad (1.5.6)$$

dove al secondo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che per i campi in $d=D-1$ dimensioni (cioè per i campi con indici greci) gli indici sono alzati ed abbassati con $G_{\mu\nu}$ e per i campi nella dimensione periodica l'indice è alzato ed abbassato con G_{dd} , mentre al terzo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che $G_{dd}=1$.

Utilizzando quest'ultimo risultato e la (1.5.4) nell'equazione del moto $\partial_M \partial^M \phi = 0$, si ottiene che:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\partial_\mu \partial^\mu \phi_n - \frac{n^2}{R^2} \phi_n \right) \exp(inx^d/R) = 0, \quad \forall \phi_n, \quad e \quad \text{quindi} \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi_n = \frac{n^2}{R^2} \phi_n. \quad (1.5.7)$$

Osserviamo ora che in $d=D-1$ dimensioni si ha che:

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 = \left(\sum_{j=1}^{d-1=D-2} p_j^2 \right) + m^2 \quad (1.5.8)$$

e quindi ne segue che:

$$m^2 \phi_n = (E^2 - \vec{p}^2) \phi_n = -p^\mu p_\mu \phi_n = -(-i\partial^\mu)(-i\partial_\mu) \phi_n = \partial^\mu \partial_\mu \phi_n = \frac{n^2}{R^2} \phi_n, \quad \forall \phi_n \quad (1.5.9)$$

dove al terzo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che $p_\mu = -i\partial/\partial x^\mu$, mentre all'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la (1.5.7), e quindi la massa a riposo al quadrato d-dimensionale vale $m^2 = n^2/R^2 = p_d^2$.

Alle piccole energie rimangono solamente i campi indipendenti da x^d e quindi la fisica è (approssimativamente) d-dimensionale.

Infatti, essendo:

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 = \vec{p}^2 + \frac{n^2}{R^2} \quad (1.5.10)$$

ne segue che se vogliamo che E sia piccola, allora $|\mathbf{p}|$ ed n/R devono essere entrambi piccoli.

Avendo però detto che R deve essere piccolo affinché noi non ci accorgiamo delle dimensioni spaziali additive, ne segue che l'intero n deve essere nullo.

Ma se $n=0$, ne segue allora che l'equazione del moto (1.5.7) diventa proprio l'equazione del moto d-dimensionale $\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0$.

Inoltre, alle basse energie, si ha che $m^2=n^2/R^2=0$ e quindi effettivamente il campo è senza massa, come doveva essere, dato che $\partial_\mu\partial^\mu\phi=0$ è l'equazione del moto per un campo scalare libero senza massa in d-dimensioni.

Invece, ad energie elevate, si ha che n/R non è più necessariamente nullo e quindi la dipendenza da n in generale rimane: quello che si vede è quindi la cosiddetta *torre di Kaluza-Klein*, ovvero una torre di particelle di massa sempre più grande quanto più grande è n (essendo $m^2=n^2/R^2$).

Quindi ad energie elevate si potrebbe vedere (se l'aumento dell'energia è dovuto anche all'aumento di n oltre che di $|\mathbf{p}|$) un primo effetto dovuto alla dipendenza del campo da x^d , ovvero il fatto che campi di massa nulla (nulla ad energie basse) è come se avessero una massa a riposo non nulla ad energie elevate.

Questa teoria può poi essere generalizzata al caso in cui siano compattificato un qualsiasi numero di dimensioni spaziali.

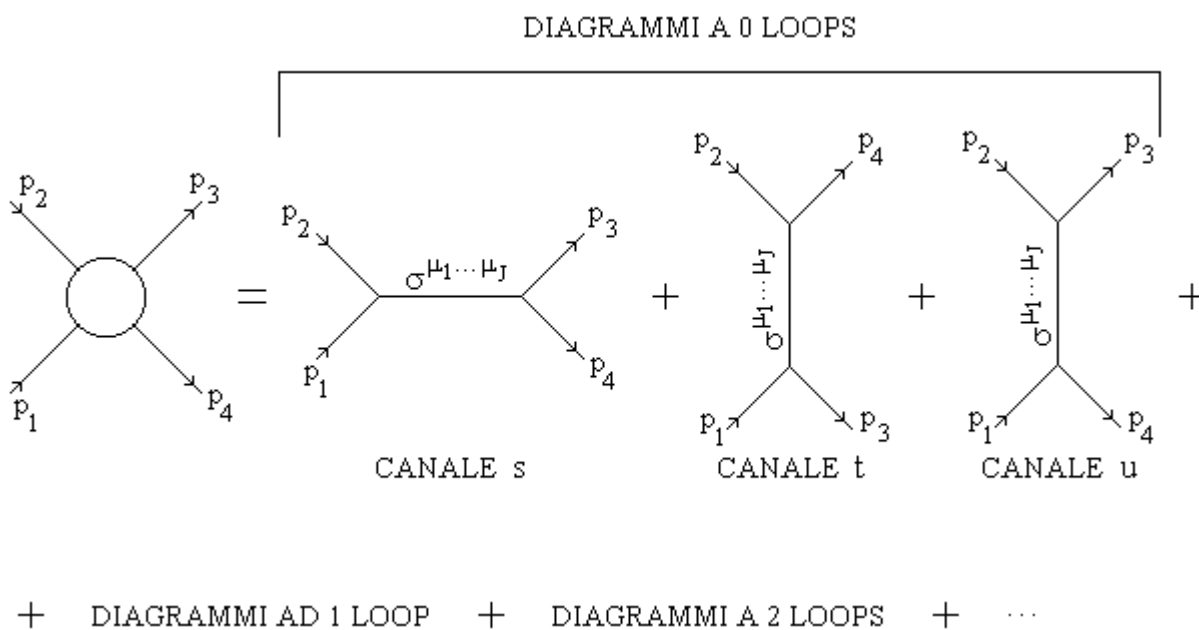
CAPITOLO 2: LA TEORIA DELLE STRINGHE

2.1 INTRODUZIONE

Nell'introduzione generale abbiamo detto che la teoria dei campi delle particelle puntiformi si è dimostrata essere un valido strumento per descrivere la forza nucleare forte, attraverso la teoria della cromodinamica quantistica (QCD).

Però, verso la fine degli anni Sessanta, prima di capire che la forza nucleare forte poteva essere descritta da una teoria di campo quantistica, era stata formulata un'altra teoria per descrivere tale forza, che si basava sull'ipotesi della dualità [3].

Per capire di cosa si tratta, consideriamo come esempio il seguente processo di scattering elastico, con particelle entranti di momento p_1 e p_2 e spin 0 (cioè particelle scalari), e particelle uscenti di momento $-p_3$ e $-p_4$ e spin 0:



dove $\sigma^{\mu_1 \dots \mu_J}$ è un bosone intermedio di tipo tensoriale di ordine J (e quindi di spin J), mentre:

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2, \quad t \equiv (p_2 + p_3)^2, \quad u \equiv (p_1 + p_3)^2 \quad (2.1.1)$$

sono le cosiddette *variabili di Mandelstam*.

Per un tale campo tensoriale, l'accoppiamento cubico nella figura è del tipo:

$$g_J \phi^* \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_J} \phi \sigma^{\mu_1 \dots \mu_J}, \quad (2.1.2)$$

dove la costante di accoppiamento è stata indicata con il simbolo g_J , mentre le derivate sono necessarie per covarianza.

Pertanto, passando allo spazio dei momenti ed utilizzando le regole di Feynman, si scopre che il contributo all'ampiezza di scattering totale dato dal canale t all'albero in questo caso è:

$$A(s, t) = \frac{g_J^2 s^J}{t - M_J^2}, \quad (2.1.3)$$

dove la potenza s^J a numeratore è dovuta alle derivate contenute nella (2.1.2).

A causa di questa potenza il comportamento dell'ampiezza di scattering peggiora per $s \rightarrow \infty$, tanto più quanto maggiore è il valore dello spin J: per questo motivo abbiamo prima detto che la teoria di campo non va bene per spin maggiori di 2.

Questo in realtà succede se nel processo di scattering viene scambiata una sola particella (il bosone intermedio $\sigma^{\mu_1 \dots \mu_J}$ nel caso analizzato).

Però la situazione migliora se vengono scambiate infinite particelle con spin diversi, nel qual caso l'ampiezza di scattering del processo sarebbe data dalla serie (che non si sa calcolare):

$$A(s, t) = \sum_{J=0}^{+\infty} \frac{g_J^2 s^J}{t - M_J^2}. \quad (2.1.4)$$

Infatti all'infinito il comportamento di una serie potrebbe essere migliore rispetto a quello di ogni suo singolo termine (vedi come esempio lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\exp(-x)$).

Inoltre sperimentalmente si osserva che:

$$A(s, t) = A(t, s). \quad (2.1.5)$$

Questa uguaglianza esprime la cosiddetta *dualità*.

Nel 1968 Veneziano presentò un modello che non rappresentava altro che un modo di soddisfare ad hoc le due ipotesi (2.1.4) e (2.1.5).

Cioè dalla (2.1.4) e dalla (2.1.5) Veneziano postulò che la forma corretta di $A(s, t)$ dovesse essere:

$$A(s,t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))}, \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \Gamma(u) = \int_0^{+\infty} t^{u-1} e^{-t} dt \\ \alpha(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s \\ \alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t \end{cases} \quad (2.1.6)$$

con α_0 ed α_1 costanti.

Innanzitutto si osserva che questa forma di $A(s,t)$ soddisfa (ovviamente) la relazione di dualità (2.1.5), che è una delle due proprietà desiderate.

Invece la seconda di tali proprietà consiste nel verificare che, sviluppando in una serie opportuna la forma di Veneziano, ciascun termine di questa serie abbia un comportamento analogo a quello dei termini della serie (2.1.4).

A tal fine osserviamo che dalle proprietà della funzione Γ si può dimostrare che:

$$\frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha(s)+1)(\alpha(s)+2)\dots(\alpha(s)+n)}{n!(\alpha(t)-n)}. \quad (2.1.7)$$

Vogliamo identificare questa Σ_n con la Σ_J della (2.1.4).

Questo lo si può fare perché, prendendo un n fissato, cioè prendendo un singolo termine della serie (2.1.7), si vede che esso ha un polo per $\alpha(t)=n$, ovvero (ricordando l'espressione di $\alpha(t)$) per $t=(n-\alpha_0)/\alpha_1$.

Quindi possiamo interpretare $(n-\alpha_0)/\alpha_1$ come la M_J^2 (con n al posto di J) dei termini della serie (2.1.4).

Inoltre, per $s \gg 1$ si ha che $\alpha(s) \sim \alpha_1 s$ e quindi il numeratore di ciascun termine della serie (2.1.7) va come s^n .

Pertanto, per $s \gg 1$, ciascun termine della serie (2.1.7) va come:

$$\frac{s^n}{t - \left(\frac{n - \alpha_0}{\alpha_1} \right)}, \quad (2.1.8)$$

che è proprio uguale all'andamento di ciascun termine della serie (2.1.4).

Quindi la forma di Veneziano soddisfa anche la seconda proprietà desiderata.

Però dobbiamo verificare che tale forma abbia anche un buon comportamento per $s \rightarrow \infty$, perché altrimenti avremmo la stessa patologia di quando abbiamo considerato lo scambio di una sola particella nei processi di scattering.

Osserviamo allora che, utilizzando la formula di Stirling:

$$\Gamma(u) \sim u^{u-\frac{1}{2}} e^{-u}, \quad \text{per} \quad u \rightarrow \infty, \quad (2.1.9)$$

la forma di Veneziano, per $s \gg 1$, diventa:

$$A(s, t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))} \sim \frac{\Gamma(-\alpha(t))(-\alpha(s))^{-\alpha(s)-\frac{1}{2}} e^{\alpha(s)}}{(-\alpha(s)-\alpha(t))^{-\alpha(s)-\alpha(t)-\frac{1}{2}} e^{\alpha(s)+\alpha(t)}} \sim \alpha(s)^{\alpha(t)} \sim s^{\alpha(t)} = s^{\alpha_0+\alpha_1 t}$$

(2.1.10)

Nel caso di scattering elastico si ha che $t < 0$.

Per t sufficientemente negativo si ha che $\alpha_0 + \alpha_1 t < 0$ e quindi che $s^{\alpha_0 + \alpha_1 t} \rightarrow 0$ per $s \rightarrow \infty$.

Pertanto la forma di Veneziano ha un buon comportamento per $s \rightarrow \infty$, che era quello che volevamo.

Quindi quello di Veneziano è un buon postulato.

Ciononostante esso non è esente da problemi, in quanto per esempio prevede l'esistenza di particelle di massa nulla che non sono mai state osservate sperimentalmente.

Inoltre questo modello non presentava un accordo molto buono con i dati derivanti dagli esperimenti di scattering ad alta energia ed angoli fissati, cosa che invece riuscì ad una teoria alternativa, introdotta negli anni '73 e '74, che è appunto quella che oggi chiamiamo cromodinamica quantistica.

Così la motivazione originale per studiare i modelli duali scomparve, ma quasi contemporaneamente ne nacque una nuova: la formulazione di una teoria quantistica della gravità, come spiegato nell'introduzione generale.

Infatti le interazioni forti sono solamente una delle aree della fisica nelle quali si presenta il problema di descrivere particelle elementari di spin elevato.

Questo problema si verifica anche nella teoria quantistica della gravità.

Il problema è capire come si quantizza l'interazione gravitazionale.

A livello macroscopico questa interazione è descritta dalla teoria della relatività generale, che può essere ricavata (attraverso le equazioni di Eulero-Lagrange) dalla cosiddetta *azione di Hilbert-Einstein*:

$$S_{HE} = \int d^4x \sqrt{-g} R + k S_{matter}, \quad (2.1.11)$$

dove g è il determinante di $g_{\mu\nu}$, mentre R è lo scalare di Ricci.

Il primo termine di questa azione descrive la gravità pura, mentre S_{matter} è un termine che viene inserito per descrivere la materia (e quindi dipende dal tensore energia-impulso della materia).

Come si può osservare, questa azione non dipende dalla costante di Planck e quindi non tiene conto degli effetti prodotti dalla meccanica quantistica.

Ciononostante la teoria della relatività generale funziona correttamente a livello macroscopico (cioè su scala planetaria) perché su tali scale di grandezza gli effetti quantistici sono trascurabili.

Però a livello microscopico (cioè su scala atomica) tali effetti non sono più trascurabili e quindi bisogna domandarsi come essi possano essere descritti.

Per tenere conto degli effetti quantistici nell'ambito della descrizione della forze elettromagnetica, nucleare forte e nucleare debole si effettua la quantizzazione della corrispondente azione classica.

Però, per quanto riguarda la gravità, noi sappiamo (dalle verifiche sperimentali) che l'azione di Hilbert-Einstein è giusta a livello macroscopico, ma potremmo sospettare che la vera (cioè giusta) azione gravitazionale classica (cioè ancora da quantizzare) possa essere diversa dalla S_{HE} a livello microscopico.

Ciò è importante in quanto solamente quantizzando (il che descrive effetti microscopici generici, cioè comuni a tutte le forze: infatti l'algebra di Heisenberg non dipende dalla forza considerata) l'appropriata azione classica microscopica (la quale tiene conto degli effetti microscopici

caratteristici della particolare forza considerata, in questo caso quella gravitazionale) si riescono a descrivere tutti gli aspetti microscopici del sistema.

In realtà si scopre, con le argomentazioni euristiche che riportiamo di seguito per il caso della gravità linearizzata, che la vera azione gravitazionale deve per forza essere della forma della SHE, con $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$.

Cominciamo con l'osservare che l'interazione gravitazionale deve essere scambiata da bosoni intermedi, che nel caso della forza gravitazionale vengono detti *gravitoni*.

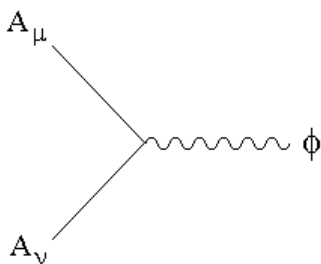
Se consideriamo il potenziale di Yukawa e^{-mr}/r , essendo il raggio d'azione della forza gravitazionale infinito (come si vede dalla legge di Newton), ne segue che i gravitoni devono avere massa nulla.

I gravitoni, essendo i responsabili della trasmissione di una forza, sono dei bosoni.

Ma di che spin?

Per capirlo, cominciamo con l'osservare che il campo gravitazionale deve interagire con il campo elettromagnetico, per descrivere la curvatura della luce in presenza di un campo gravitazionale (prevista a livello classico da Einstein ed osservata sperimentalmente da sir Arthur Stanley Eddington nel 1919).

Questa interazione a livello quantistico è ovviamente descritta da un vertice d'interazione gravitone-fotone:



La teoria deve poi essere gauge-invariante.

Se il gravitone fosse uno scalare ϕ , allora l'unico oggetto gauge-invariante che possa essere identificato come lagrangiana classica d'interazione tra gravitone e fotone sarebbe:

$$L_{\text{int}} = g\phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \text{dove} \quad F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}. \quad (2.1.12)$$

Però dalla lagrangiana classica libera del campo elettromagnetico si vede che $[A]=1$, dove $[.]$ rappresenta la dimensione di massa.

Inoltre in questo caso ϕ è per ipotesi uno scalare, e quindi la sua lagrangiana classica libera è del tipo (1.2.7), con $m=0$ (il termine di massa non c'è perché abbiamo detto prima che il gravitone deve avere massa nulla), dalla quale si vede che $[\phi]=1$.

Pertanto dalla (2.1.12) ne segue che $[g]=-1$, che è negativo, e quindi nel caso in cui ϕ fosse uno scalare la teoria sarebbe non rinormalizzabile.

Pertanto il gravitone non può essere uno scalare.

Per capire invece che il gravitone non può essere nemmeno un vettore, basta osservare che, in caso contrario, esisterebbero (analogamente al caso della forza elettromagnetica, che è descritta appunto da un campo vettoriale) in modo uguale la possibilità di avere forza gravitazionale attrattiva e la possibilità di avere forza gravitazionale repulsiva.

Siccome però la forza gravitazionale repulsiva (detta *antigravità* e generata dalla cosiddetta *materia esotica*) non è mai (finora) stata osservata in natura, ne segue che le due forze gravitazionali non

hanno la stessa possibilità di manifestarsi e quindi che il gravitone non può essere descritto da un campo vettoriale.

Invece si scopre che il gravitone viene correttamente descritto da un campo tensoriale di rango 2, e quindi il gravitone deve avere spin 2.

Si deve quindi usare un tensore $h_{\mu\nu}$ per rappresentare le fluttuazioni quantistiche del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ attorno alla configurazione di spazio piatto $\eta_{\mu\nu}$, cioè $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$.

Il termine cinetico della teoria deve allora essere del tipo:

$$S = \int d^4x (\partial^\mu h_{\rho\sigma}) (\partial_\mu h^{\rho\sigma}). \quad (2.1.13)$$

Il campo gravitazionale si accoppia con sè stesso (anche a livello classico), a differenza del campo elettromagnetico, anche in assenza di materia, con accoppiamenti della forma $h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$.

Da tutte queste osservazioni euristiche ne segue che la vera azione gravitazionale deve necessariamente essere della forma della S_{HE} .

Però quello che si scopre è che questa teoria non è rinormalizzabile.

Lo si può infatti vedere per esempio dalla formula della forza gravitazionale di Newton, dalla quale segue che la costante di gravitazione universale G (che funge da costante di accoppiamento tra gravitoni) ha dimensione di massa -2 , che è negativa.

Oppure lo si può vedere dallo sviluppo in serie di potenze di $h_{\mu\nu}$ della S_{HE} .

Che una teoria è rinormalizzabile vuol dire che essa dipende da un numero finito di parametri in modo polinomiale: solo così essa può essere predittiva (infatti non potrebbe essere predittiva se dipendesse da un numero infinito di parametri).

Se estendiamo la rinormalizzabilità a teorie che dipendono da un numero finito di parametri ma in modo NON polinomiale, allora possiamo salvare la S_{HE} quantizzata.

Questo per la gravità pura, cioè in assenza di materia (cioè ponendo $k=0$ nella S_{HE}).

Bisogna poi risolvere il problema di accoppiare la gravità quantistica alla materia (cioè considerare il caso con $k \neq 0$).

Però noi descriviamo la materia attraverso le teorie di campo, le quali non sappiamo se funzionano correttamente anche per energie maggiori di 100 GeV.

E siccome in un processo gli effetti quantistici sulla gravità cominciano ad essere osservabili solamente a partire dai 10^{19} GeV (come detto in precedenza), che sono molto maggiori di 100 GeV, ne segue che non possiamo essere sicuri che la teoria che descrive la materia possa essere ancora corretta a quel punto.

Altrimenti, per essere sicuri che la teoria di campo descriva correttamente la materia, dobbiamo rimanere ad energie inferiori ai 100 GeV, ma a tali energie la forza gravitazionale è trascurabile, e quindi non servirebbe a niente la sua quantizzazione.

Queste osservazioni portarono a concludere che serviva una teoria decisamente nuova.

La teoria in questione, per ragioni che spiegheremo più avanti, potrebbe essere la teoria delle stringhe.

2.2 LA TEORIA DELLE STRINGHE CLASSICA

LE AZIONI DI NAMBU-GOTO E DI POLYAKOV

Una teoria delle stringhe è una teoria nella quale le particelle elementari sono considerate degli oggetti monodimensionali, le stringhe appunto, piuttosto che punti, come si ha invece nella teoria quantistica di campo precedentemente descritta.

Pertanto una stringa è un oggetto la cui unica dimensione è la lunghezza.

Vogliamo quindi studiare la meccanica classica e quella quantistica di tale oggetto, che supporremo muoversi in uno spazio-tempo piatto (cioè con metrica di Minkowski) di D dimensioni (dove D per ora è generico).

Procediamo in modo analogo a quanto visto nel paragrafo 1.4 per la particella puntiforme, generalizzando [8] però quei passaggi al caso di un oggetto monodimensionale.

Consideriamo ora il caso di moto più semplice, cioè supponiamo di avere una stringa rettilinea tesa e di spostarla in modo rigido (cioè in modo che essa rimanga ancora rettilinea e tesa) nella direzione ortogonale alla sua lunghezza, con velocità v_{\perp} : in altri termini spostiamo la stringa in modo che tutti i suoi punti abbiano quella stessa velocità.

Indicando con m_0 , T ed l rispettivamente la massa a riposo, la tensione e la lunghezza della stringa (collegati tra loro dalla relazione $m_0c^2=TL$), l'energia meccanica totale che la stringa presenta in questo moto è data da:

$$E_{TOT} = \int d \left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v_{\perp}/c)^2}} \right) = \int d \left(\frac{TL}{\sqrt{1-(v_{\perp}/c)^2}} \right) \approx TL + \frac{1}{2} T \int \left(\frac{v_{\perp}}{c} \right)^2 dl = U + E_{KIN}, \quad (2.2.1)$$

con l'integrale che è calcolato su tutta la lunghezza della stringa.

L'approssimazione fatta vale nel caso di limite non-relativistico.

Nel caso di stringa rettilinea e tesa avremmo anche potuto portare v_{\perp} fuori dall'integrale dato che in tal caso essa è costante.

Esiste però almeno un caso nel quale la velocità posseduta dalla stringa è ortogonale alla direzione della sua lunghezza in ogni suo punto ma non è costante lungo la stringa: si tratta del caso di stringa rettilinea e tesa che ruota attorno ad un suo punto tenuto fisso.

In questo caso la velocità dei punti della stringa è del tipo v_{\perp} , ma il suo modulo dipende dalla distanza del punto considerato da quello fisso di rotazione: in questo caso U ed E_{KIN} devono essere espresse con l'integrale (nel caso di moto generico bisognerà esprimere U ed E_{KIN} in termini della velocità complessiva di dei vari punti della stringa, che non sarà necessariamente ortogonale alla stringa in ogni suo punto).

Dalle espressioni ricavate prima per U ed E_{KIN} , ne segue che (sempre nel limite non-relativistico) la lagrangiana della stringa è:

$$L = E_{KIN} - U = -T \int dl \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{\perp}}{c} \right)^2 \right) \approx -T \int dl \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{\perp}}{c} \right)^2} \quad (2.2.2)$$

e quindi la sua azione è:

$$S = \int L dt = -T \int \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{\perp}}{c} \right)^2} dt dl = -T \int ds dl, \quad (2.2.3)$$

dove:

$$ds = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{\perp}}{c} \right)^2} dt \quad (2.2.4)$$

rappresenta il tempo proprio (infinitesimo) della teoria della relatività.

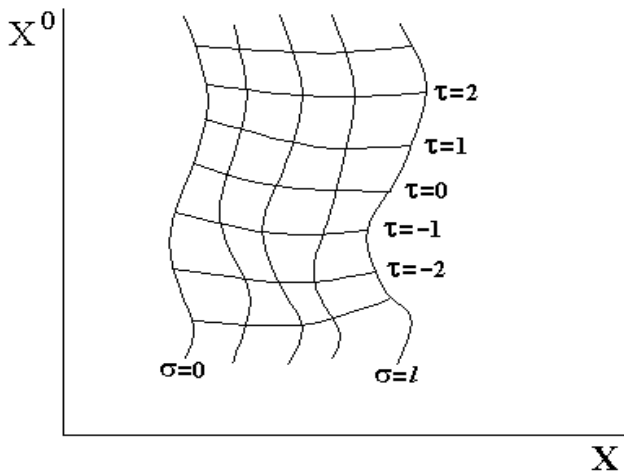
Questa espressione è Lorentz-covariante e quindi, se descrive il moto della stringa in un frame non-relativistico, allora ne descrive il moto in qualsiasi frame di Lorentz, e quindi anche a velocità relativistiche.

Il termine $\int ds dl$ rappresenta ovviamente l'area spazzata dalla stringa durante il suo moto nello spazio-tempo.

Pertanto possiamo dire che, così come l'azione della particella puntiforme è data dalla lunghezza della sua world-line (moltiplicata per $-m$, dove m rappresenta la massa della particella), l'azione della stringa, in quanto oggetto con una dimensione in più, è data dall'area del suo world-sheet (moltiplicata per $-T$, poiché per la stringa si ha che $m_0 = Tl/c^2$).

La (2.2.3) è detta *azione di Nambu-Goto* (S_{NG})

Trattandosi di un'area, cioè di un luogo geometrico bidimensionale, essa viene descritta da 2 parametri, σ e τ , come di seguito mostrato [2]:



Quindi σ parametrizza la posizione sulla stringa (cioè è associata all'infinitesimo dl nell'azione di Nambu-Goto), mentre τ ne parametrizza la propagazione temporale (cioè è associata all'infinitesimo ds nell'azione di Nambu-Goto; pertanto τ rappresenta il tempo proprio della stringa).

Le coordinate $X^i(\sigma, \tau)$, con $i=1, \dots, d=D-1$ (consideriamo D , cioè il numero delle coordinate dello spazio-tempo, come un numero generico, anziché 4, come sembrerebbe ovvio; il motivo di ciò verrà spiegato più avanti), rappresentano la posizione spaziale del punto (σ, τ) del world-sheet.

Quindi, al variare di σ da 0 ad l (solitamente per convenzione si pone $l=\pi$) ed al variare di τ da $-\infty$ a $+\infty$, le $X^i(\sigma,\tau)$ descrivono l'evoluzione della posizione spaziale della stringa al variare del tempo proprio τ .

Se invece vogliamo descrivere l'evoluzione della posizione spaziale della stringa al variare del tempo ordinario, dobbiamo introdurre una coordinata che rappresenti tale tempo, e che indichiamo con $X^0(\sigma,\tau)$ (e che altri non è che l'analogo del tempo $t(s)$ visto in precedenza per la particella puntiforme, quando abbiamo trattato la teoria dei campi).

Il complesso della $X^0(\sigma,\tau)$ e delle $X^i(\sigma,\tau)$ viene indicato sinteticamente con $X^\mu(\sigma,\tau)$, dove $\mu=0, \dots, D-1$.

Pertanto le X^μ altro non sono che una mappa dal world sheet (WS) allo spazio di Minkowski D -dimensionale (M_D), cioè:

$$X^\mu : \begin{cases} WS = (0, l) \times \mathbb{R} \rightarrow M_D \\ (\sigma, \tau) \mapsto X^\mu(\sigma, \tau) \end{cases} \quad (2.2.5)$$

A livello della meccanica classica, D può assumere qualsiasi valore, senza compromettere la consistenza della teoria, e pertanto la scelta più ovvia (in base all'osservazione sperimentale) sembrerebbe essere quella di porre $D=4$.

Però, se si prova a descrivere invece la stringa attraverso le leggi della meccanica quantistica, si scopre che la consistenza della teoria necessita di porre $D>4$, come dimostreremo più avanti.

Introducendo la metrica indotta sul world-sheet (indotta dalla metrica $ds^2=\eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu$ dello spazio-tempo):

$$h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad \text{con} \quad a, b = 1, 2 \quad e \quad ds^2 = h_{ab} d\sigma^a d\sigma^b \quad (2.2.6)$$

(cioè abbiamo indicato τ con σ^1 e σ con σ^2) ed utilizzando il teorema dell'area per esprimere la grandezza $|\text{dsdl}|$ in termini delle X^μ , si ottiene che l'azione di Nambu-Goto può essere scritta nel seguente modo:

$$S_{NG} = -T \int d\sigma d\tau \sqrt{-\det h_{ab}} = -T \int d\sigma d\tau \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma} \right) - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right)^2}. \quad (2.2.7)$$

Si dimostra [3] inoltre che $T=1/(2\pi\alpha')$, dove α' è detto *Regge slope*, che è definito come il massimo momento angolare possibile per unità di energia al quadrato (si dimostra [2] poi che la teoria delle stringhe prevede l'ampiezza di Veneziano (2.1.6) e che l' α_1 della (2.1.6) è esattamente l' α' della tensione di stringa).

Comunque la S_{NG} viene usata poco poiché contiene una radice quadrata delle coordinate X^μ , che rende i calcoli molto laboriosi.

Pertanto si cerca di definire un'azione equivalente alla S_{NG} (che sia sempre quadratica nelle X^μ), ma che a differenza di essa non contenga una radice delle coordinate X^μ . (la stessa cosa può essere fatta nel caso della particella puntiforme [2][3]).

A tal fine s'introduce la cosiddetta *azione di Brink-Di Vecchia-Howe-Deser-Zumino*, od *azione di Polyakov* per brevità:

$$S_P[X, \gamma] = -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det \gamma_{ab}} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad (2.2.8)$$

dove γ_{ab} rappresenta una metrica (con segnatura Lorentziano(-,+)) di world-sheet indipendente.

Per vedere perché S_P è equivalente ad S_{NG} , bisogna ricavare l'equazione del moto $\delta_\gamma S_P = 0$ (dove $\delta_\gamma S_P$ rappresenta la variazione di S_P causata da una variazione infinitesima $\delta\gamma_{ab}$ di γ_{ab}), la quale permette di vedere che γ_{ab} è proporzionale ad h_{ab} [2].

Questo risultato può essere usato per eliminare γ_{ab} dall'azione S_P .

Quello che si ottiene è:

$$S_P[X, \gamma] \rightarrow -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det h_{ab}} = S_{NG}[X], \quad (2.2.9)$$

il che dimostra l'equivalenza delle due azioni S_P ed S_{NG} .

Siccome ci interesserà effettuare la quantizzazione funzionale di questa teoria, occorre sapere quali sono le simmetrie della S_P , in modo da eliminare le ridondanze da esse causate e che comportano la divergenza dell'integrale funzionale.

Si dimostra allora che la S_P presenta le seguenti simmetrie:

1) invarianza di Poincarè D-dimensionale:

$$\begin{cases} X'^\mu(\tau, \sigma) = \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu, \\ \gamma'_{ab}(\tau, \sigma) = \gamma_{ab}(\tau, \sigma), \end{cases} \quad (2.2.10)$$

dove Λ rappresenta la generica trasformazione di Poincarè D-dimensionale, mentre a^μ è un vettore costante.

2) invarianza sotto riparametrizzazioni di τ e σ (diffeomorphism invariance):

$$\begin{cases} X'^\mu(\tau', \sigma') = X^\mu(\tau, \sigma), \\ \frac{\partial \sigma'^c}{\partial \sigma^a} \frac{\partial \sigma'^d}{\partial \sigma^b} \gamma'_{cd}(\tau', \sigma') = \gamma_{ab}(\tau, \sigma), \end{cases} \quad (2.2.11)$$

per nuovi parametri $\sigma'^a(\tau, \sigma)$.

3) invarianza di Weyl bidimensionale:

$$\begin{cases} X'^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma), \\ \gamma'_{ab}(\tau, \sigma) = e^{2\omega(\tau, \sigma)} \gamma_{ab}(\tau, \sigma), \end{cases} \quad (2.2.12)$$

per una funzione $\omega(\tau, \sigma)$ arbitraria.

EQUAZIONI DEL MOTO, STRINGHE APERTE E CHIUSE

La variazione di S_p rispetto a γ_{ab} definisce il tensore energia impulso T^{ab} :

$$T^{ab} \equiv -\frac{4\pi}{\sqrt{-\det\gamma_{ab}}} \frac{\delta S_p}{\delta \gamma_{ab}} = -\frac{1}{\alpha'} \left(\partial^a X^\mu \partial^b X_\mu - \frac{1}{2} \gamma^{ab} \partial_c X^\mu \partial^c X_\mu \right). \quad (2.2.13)$$

Esso è conservato, cioè:

$$\nabla_a T^{ab} = 0, \quad \text{dove} \quad \nabla_a = \gamma_{ab} \partial^b, \quad (2.2.14)$$

come conseguenza della simmetria (2.2.11) (teorema della Noether).

Si dimostra poi che la corrente conservata associata (sempre attraverso il teorema delle Noether) alla simmetria (2.2.12) è $T_{ab} \sigma^b$.

Quindi la simmetria (2.2.12) implica che:

$$0 = \nabla^a (T_{ab} \sigma^b) = (\nabla^a T_{ab}) \sigma^b + T_{ab} (\nabla^a \sigma^b) = T_{ab} \delta^{ab} = T_a^a \quad (2.2.15)$$

(dove al terzo passaggio abbiamo utilizzato la (2.2.14)), cioè che il tensore energia-impulso è un tensore di traccia nulla (sottolineiamo il fatto che questo risultato è stato ottenuto nell'ambito della meccanica CLASSICA della stringa; a livello quantistico questo non sarà più vero, come vedremo nel paragrafo 2.3).

Vediamo ora le equazioni del moto.

Quella che si ottiene variando S_p rispetto a γ_{ab} , ricordando la definizione del tensore energia-impulso, diventa:

$$T^{ab} = 0. \quad (2.2.16)$$

Invece, per quanto riguarda l'equazione del moto che si ottiene variando S_p rispetto ad X^μ , dobbiamo distinguere due casi.

Infatti abbiamo due tipi possibili di stringhe da esaminare: le stringhe aperte e quelle chiuse (nella teoria di campo di stringa ci interesseremo solamente al caso delle stringhe aperte).

Il world-sheet delle stringhe chiuse non ha bordo, poiché si chiude su sé stesso.

Pertanto, calcolando la variazione di S_p rispetto ad X^μ , non si forma alcun termine di "superficie":

$$\delta S_p = T \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \oint d\sigma \sqrt{-\det\gamma_{ab}} \delta X_\mu \nabla^2 X^\mu, \quad \text{dove} \quad \nabla^2 = \gamma^{ab} \partial_a \partial_b. \quad (2.2.17)$$

Pertanto l'equazione del moto che si ottiene ponendo $\delta S_P=0$ è:

$$\nabla^2 X^\mu = 0, \quad (2.2.18)$$

alla quale va aggiunta la condizione di periodicità (cioè la condizione che esprime che la stringa è chiusa):

$$X^\mu(\tau, \sigma + l) = X^\mu(\tau, \sigma), \quad \forall \quad -\infty \leq \tau \leq +\infty \quad e \quad \forall \quad 0 \leq \sigma \leq l. \quad (2.2.19)$$

Invece il world-sheet delle stringhe aperte ha bordo (in $\sigma=0$ e $\sigma=l$) e quindi, calcolando la variazione di S_P rispetto ad X^μ , questa volta si forma un termine di “superficie”:

$$\delta S_P = T \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_0^l d\sigma \sqrt{-\det \gamma_{ab}} \delta X_\mu \nabla^2 X^\mu - T \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \sqrt{-\det \gamma_{ab}} \left(\delta X_\mu(\tau, l) \frac{\partial X^\mu(\tau, \sigma)}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=l} + \right. \\ \left. - \delta X_\mu(\tau, 0) \frac{\partial X^\mu(\tau, \sigma)}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} \right)$$

(2.2.20)

(è facile vedere che la (2.2.20) diventa uguale alla (2.2.17) se si identificano i due punti $\sigma=0$ e $\sigma=l$, cioè se si trasforma la stringa aperta in una stringa chiusa).

I due termini della (2.2.20) sono tra loro indipendenti e quindi per ottenere l'equazione del moto $\delta S_P=0$ dobbiamo imporli entrambi uguali a zero.

L'annullamento del primo termine dà ancora $\nabla^2 X^\mu = 0$, mentre il secondo termine si annulla in due casi differenti.

Il primo caso è:

$$\frac{\partial X^\mu(\tau, \sigma)}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=l} = \frac{\partial X^\mu(\tau, \sigma)}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} = 0, \quad \delta X_\mu(\tau, l), \delta X_\mu(\tau, 0) \neq 0, \quad (2.2.21)$$

che sono dette *condizioni al contorno di Neumann*.

Con queste condizioni al contorno gli estremi della stringa aperta sono liberi di muoversi, in quanto $\delta X_\mu(\tau, l)$ e $\delta X_\mu(\tau, 0)$ sono diversi da zero.

Invece il secondo caso nel quale il termine di bordo si annulla è:

$$\delta X_\mu(\tau, l) = \delta X_\mu(\tau, 0) = 0, \quad (2.2.22)$$

(con le due derivate $\partial X^\mu(\tau, \sigma)/\partial \sigma$ in $\sigma=l$ e $\sigma=0$ non necessariamente nulle) che sono dette *condizioni al contorno di Dirichlet*.

Con queste condizioni al contorno gli estremi della stringa ovviamente sono fissi, cioè non liberi di muoversi.

LA TEORIA DELLE STRINGHE COME TEORIA DI CAMPO CONFORME

Le azioni S_{NG} ed S_p definiscono delle teorie di campo bidimensionali sul world-sheet della stringa. Noi siamo interessati alla descrizione dei processi in termini dello spazio-tempo, però si dimostra che nella teoria delle stringhe le ampiezze per processi di spazio-tempo sono date da elementi di matrice calcolati nella teoria quantistica di campo bidimensionale sul world-sheet. Pertanto lavoreremo sul world-sheet, ricavando le informazioni dalla teoria di campo bidimensionale definita su di esso attraverso l'azione S_p .

Dal punto di vista dello spazio-tempo, X^μ è un campo vettoriale, a causa della (2.2.10). Però, dal punto di vista del world-sheet, la (2.2.10) diventa una simmetria interna.

Inoltre, sempre dal punto di vista del world-sheet, le X^μ sono D campi scalari, a causa della (2.2.11).

Per di più, a causa della particolare forma della S_p che li descrive, questi campi scalari sono del tipo di Klein-Gordon e con massa nulla, covariantemente accoppiati alla metrica γ_{ab} .

Abbiamo visto che la teoria delle stringhe classica è invariante sotto le trasformazioni (2.2.11) e (2.2.12) considerate singolarmente, e quindi anche sotto una combinazione delle due.

Ma la combinazione di un diffeomorfismo con una trasformazione di Weyl costituisce una cosiddetta *trasformazione di scala*, che è un particolare tipo di *trasformazione conforme* (le trasformazioni conformi sono definite nell'appendice A.3).

In tre o più dimensioni, l'invarianza conforme non dà molta più informazione rispetto all'ordinaria invarianza di scala, a differenza del caso bidimensionale (ciò è dovuto al fatto che, in due dimensioni, l'algebra conforme diventa infinito-dimensionale, come spiegato sempre nell'appendice A.3).

Quindi la teoria delle stringhe classica è invariante sotto trasformazione conforme.

Pertanto, per quantizzarla, converrà utilizzare tutto ciò che è noto per la quantizzazione delle teorie di campo conformi.

Infatti queste teorie erano già note prima dell'avvento della teoria delle stringhe, perché compaiono nell'ambito della meccanica statistica, dato che i modelli di meccanica statistica bidimensionali diventano invarianti conformi al punto critico per le transizioni di fase al secondo ordine.

L'esempio canonico è rappresentato dal modello di Ising in due dimensioni, con spin $\sigma_i = \pm 1$ sui lati di un reticolo quadrato.

Alla transizione di fase, configurazioni tipiche hanno fluttuazioni su tutte le scale di lunghezza, così la teoria di campo che descrive il modello al suo punto critico ci si aspetta che sia invariante almeno sotto cambiamenti di scala.

Infatti, le teorie critiche sono più generalmente invarianti sotto l'intero gruppo conforme.

Questi modelli sono detti modelli sigma.

Quindi la teoria delle stringhe è una particolare teoria conforme (cioè ha l'azione specificata; invece nell'appendice A.3 abbiamo effettuato uno studio con azione generica, purchè invariante sotto trasformazione conforme).

Questo ci permette quindi di calcolare l'espressione esplicita del tensore energia-impulso, nonché il valore esplicito della carica centrale (per quanto riguarda la stringa quantizzata).

Comunque solitamente nell'ambito delle teorie di campo conformi si studia un'azione della forma:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left(\partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu + \partial_2 X^\mu \partial_2 X_\mu \right), \quad \text{dove} \quad d^2\sigma \equiv d\sigma^1 d\sigma^2, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial\sigma^a} \quad \text{con} \quad a=1,2.$$

(2.2.23)

Anche la teoria delle stringhe è descritta da un'azione di questo tipo.

Infatti la (2.2.23) è, per la teoria delle stringhe, proprio l'azione che si ottiene localmente dall'azione di Polyakov (2.2.8) gauge-fissando la ridondanza dovuta alle simmetrie (2.2.11) e (2.2.12), ruotata poi all'euclideo per quanto riguarda la metrica di world-sheet.

In altre parole, gauge-fissando la teoria si ottiene che localmente $(-\det\gamma_{ab})^{1/2}\gamma^{ab}=\eta^{ab}$, ma noi sostituiamo η^{ab} con una metrica piatta euclidea δ_{ab} , di segnatura (+,+).

Il cambiamento di segno complessivo dell'azione è il risultato di una convenzione euclidea [2].

Si considera una metrica di world-sheet euclidea poiché nella teoria delle stringhe essa è utile in molti calcoli.

Se invece si vogliono esprimere i risultati in termini di η_{ab} , la relazione tra ampiezze di Minkowski ed ampiezze euclidee è data da un prolungamento analitico standard (si veda [2]).

Infatti, i risultati per metrica euclidea valgono anche per un world-sheet di Minkowski se si effettua la sostituzione di σ^2 con $i\sigma^0$, cioè se si effettua la rotazione di Wick.

Questo per l'indice a.

Invece per l'indice μ continuiamo a prendere la metrica piatta di Minkowski.

Come spiegato anche nelle appendici A.2 ed A.3, dato che stiamo lavorando su un piano in due dimensioni, anziché utilizzare le due coordinate reali σ^1 e σ^2 , conviene utilizzare le due coordinate complesse:

$$z = \sigma^1 + i\sigma^2, \quad \bar{z} = \sigma^1 - i\sigma^2 \quad (2.2.24)$$

(dove la barra indica il complesso coniugato), perché così è possibile utilizzare tutti i teoremi noti dall'analisi complessa, i quali risulteranno essere molto utili in questo ambito.

È convenzione abbreviare ∂_z con ∂ e $\partial_{\bar{z}}$ con $\bar{\partial}$ quando questo non è ambiguo.

In termini di queste coordinate complesse, l'azione (2.2.23) diventa:

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu \quad (2.2.25)$$

e l'equazione classica del moto a cui essa dà luogo è:

$$\partial \bar{\partial} X^\mu (z, \bar{z}) = 0, \quad (2.2.26)$$

come doveva essere (dato che la (2.2.26) diventa esattamente la (2.2.18), nel caso in cui δ_{ab} venga sostituito da γ_{ab} e riesprimendo le coordinate complesse in termini di quelle reali σ^1 e σ^2).

La notazione $X^\mu(z, \bar{z})$ può sembrare ridondante, siccome il valore di z determina quello di \bar{z} , ma è utile riservare la notazione $f(z)$ per i campi le cui equazioni del moto li rendono funzioni analitiche di z (è più usato il termine *olomorfe*), e la notazione $g(\bar{z})$ per quei campi le cui equazioni del moto li rendono funzioni analitiche di \bar{z} (cioè funzioni dette *antiolomorfe*). Scrivendo la (2.2.26) come:

$$\partial(\bar{\partial}X^\mu) = \bar{\partial}(\partial X^\mu) = 0, \quad (2.2.27)$$

si vede immediatamente che ∂X^μ è olomorfa e che $\bar{\partial} X^\mu$ è antiolomorfa. Questo permette di utilizzare i diversi teoremi dell'analisi complessa validi appunto per le funzioni analitiche, il che è un grande vantaggio, che giustifica il passaggio alla descrizione effettuata attraverso le coordinate complesse.

L'espressione (2.2.13) di T_{ab} , scritta in coordinate complesse nel caso di γ_{ab} sostituito da δ_{ab} , è:

$$T_{zz} = -\frac{1}{\alpha'} \partial X^\mu \partial X_\mu, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = -\frac{1}{\alpha'} \bar{\partial} X^\mu \bar{\partial} X_\mu \quad (2.2.28)$$

(la definizione di T_{zz} e $T_{\bar{z}\bar{z}}$ è data nella (A.3.25)) e ricordando che ∂X^μ è olomorfa e che $\bar{\partial} X^\mu$ è antiolomorfa, ne segue in effetti che T_{zz} è una funzione olomorfa e che $T_{\bar{z}\bar{z}}$ è una funzione antiolomorfa (come doveva essere, per la (A.3.28)).

2.3 LA TEORIA DELLE STRINGHE QUANTISTICA

Da qui in poi useremo delle nozioni della teoria di campo conforme che sono state sviluppate nell'appendice, per non allungare eccessivamente il discorso in atto.

Nel caso quantistico bisogna inserire il normal ordering $:$ nell'espressione (2.2.13) del tensore energia-impulso (e quindi anche nella (2.2.28)), al fine di eliminare le singolarità che si producono dalla quantizzazione dei campi:

$$T^{ab} = -\frac{1}{\alpha'} : \left(\partial^a X^\mu \partial^b X_\mu - \frac{1}{2} \gamma^{ab} \partial_c X^\mu \partial^c X_\mu \right) : \quad (2.3.1)$$

$$T(z) \equiv T_{zz} = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X^\mu \partial X_\mu : , \quad \bar{T}(\bar{z}) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}} = -\frac{1}{\alpha'} : \bar{\partial} X^\mu \bar{\partial} X_\mu :$$

Inoltre, dalla (2.2.29), e dal propagatore:

$$\langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') \rangle = -\eta^{\mu\nu} \log|z - z'|^2 \quad (2.3.2)$$

(la dimostrazione di questa formula è riportata in [2], ma in questo lavoro non la riportiamo per non allungare eccessivamente il discorso; per ricavarla basta comunque invertire l'operatore cinetico

della (2.2.25)) si ottiene che l'espansione del prodotto del tensore energia-impulso con sè stesso (detta OPE, acronimo di operator product expansion) è:

$$\begin{aligned}
T(z)T(z') &= \frac{\eta_{\mu}^{\mu}}{2(z-z')^4} - \frac{2}{\alpha'(z-z')^2} : \partial X^{\mu}(z) \partial X_{\mu}(z') : + : T(z)T(z') : \sim \\
&\sim \frac{D}{2(z-z')^4} + \frac{2}{(z-z')^2} T(z') + \frac{1}{z-z'} \partial T(z'), \tag{2.3.3}
\end{aligned}$$

da cui si vede, confrontando con la (A.3.35), che la carica centrale della teoria delle stringhe quantizzata è $c=D$, dove ricordiamo che D rappresenta il numero delle coordinate spaziotemporali. Le due teorie descritte nell'appendice A.3, cioè quella con la coordinata spaziale compattificata e quella con la coordinata spaziale non compattificata, nel caso della teoria delle stringhe rappresentano rispettivamente la teoria di stringa chiusa e quella di stringa aperta.

ESPANSIONE DEI MODI E QUANTIZZAZIONE CANONICA

Nella teoria di campo libera, i campi si decompongono in oscillatori armonici, e lo spettro ed il tensore energia-impulso possono essere espressi in termini dei modi di oscillazione.

Iniziamo con la stringa chiusa, perchè da essa possono poi essere ricavati anche i risultati della stringa aperta.

Abbiamo visto che $\partial X^{\mu}(z)$ e $\bar{\partial} X^{\mu}(\bar{z})$ sono rispettivamente olomorfi ed antiolomorfi e quindi hanno un'espansione di Laurent:

$$\partial X^{\mu}(z) = -i \left(\frac{\alpha'}{2} \right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_m^{\mu}}{z^{m+1}}, \quad \bar{\partial} X^{\mu}(\bar{z}) = -i \left(\frac{\alpha'}{2} \right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\alpha}_m^{\mu}}{\bar{z}^{m+1}}. \tag{2.3.4}$$

In modo equivalente:

$$\begin{aligned}
\alpha_m^{\mu} &= \left(\frac{2}{\alpha'} \right)^{1/2} \oint \frac{dz}{2\pi} z^m \partial X^{\mu}(z), \\
\tilde{\alpha}_m^{\mu} &= - \left(\frac{2}{\alpha'} \right)^{1/2} \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi} \bar{z}^m \bar{\partial} X^{\mu}(\bar{z}), \tag{2.3.5}
\end{aligned}$$

dove questi integrali sono calcolati su un contorno chiuso che circonda l'origine del piano complesso.

Siccome le funzioni X^{μ} devono essere ad un solo valore, ne segue che deve essere:

$$\alpha_0^{\mu} = \tilde{\alpha}_0^{\mu}. \tag{2.3.6}$$

Inoltre, la corrente della Noether per le traslazioni spaziotemporali è $i\partial_a X^\mu/\alpha'$, così il momento spaziotemporale è:

$$p^\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (dz j^\mu - d\bar{z} \tilde{j}^\mu) = \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \alpha_0^\mu = \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \tilde{\alpha}_0^\mu. \quad (2.3.7)$$

Integrando l'espansione (2.3.4) si ottiene:

$$X^\mu(z, \bar{z}) = x^\mu - i\frac{\alpha'}{2} p^\mu \ln|z|^2 + i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\alpha_m^\mu}{z^m} + \frac{\tilde{\alpha}_m^\mu}{\bar{z}^m} \right). \quad (2.3.8)$$

Questo ancora a livello classico.

Per quantizzare la teoria ci servono le regole di commutazione:

$$\begin{aligned} [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] &= [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\delta_{m,-n}\eta^{\mu\nu}, \\ [x^\mu, p^\nu] &= i\eta^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

con gli altri commutatori nulli, che possono essere ricavate dalle regole di commutazione standard (estese al caso della stringa) oppure dall'argomento del contorno esposto al paragrafo A.2.

Lo spettro è dato iniziando con lo stato di vuoto $|0;k\rangle$ (vedere il paragrafo 2.4 per una trattazione più dettagliata dello stato di vuoto), che ha momento k^μ ed è annichilato da tutti i distruttori, α_n^μ per $n>0$, ed agendo in tutti i modi possibili con gli operatori di creazione ($n<0$) (N.B.: nonostante $|0;k\rangle$ venga chiamato "stato di vuoto", esso in realtà rappresenta lo *stato fondamentale* (ground state) della stringa, cioè lo stato di minima energia, poichè questa teoria delle stringhe è formulata in prima quantizzazione. Lo stato di vuoto propriamente detto è quello delle teorie di campo invece, che rappresenta la configurazione senza particelle).

Nel paragrafo A.3 abbiamo definito i cosiddetti *operatori di Virasoro*, che costituiscono un concetto molto importante per un teoria di campo conforme.

Ora, per la teoria delle stringhe, vogliamo espandere i generatori di Virasoro in termini degli operatori di creazione e distruzione.

Inseriamo l'espansione di Laurent per X^μ nel tensore energia-impulso (2.3.1) e raggruppiamo i termini con una data potenza di z , il che ci dà:

$$L_m \sim \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m-n}^\mu \alpha_{\mu n}. \quad (2.3.10)$$

Il simbolo \sim indica che abbiamo ignorato gli operatori di ordering.

Per $m \neq 0$, l'espansione (2.3.10) è ben definita e corretta così come è, poichè gli operatori dei modi in ciascun termine commutano e quindi l'ordine non importa.

Per $m=0$ invece, mettiamo gli operatori di distruzione sulla destra ed introduciamo una costante di normal ordering:

$$L_0 = \frac{\alpha' p^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_{\mu n}) + a^X. \quad (2.3.11)$$

Ora il lato sinistro ha una definizione finita e non-ambigua in termini dei coefficienti di Laurent del tensore energia-impulso normal ordered, così la costante di normal ordering è finita e calcolabile.

Ci sono diversi modi per determinarla, e quello che si ottiene è che $a^X=0$.

Ora introduciamo una nuova notazione.

Il simbolo $\circ \circ$ denota il cosiddetto *creation-annihilation normal ordering*, che consiste nel sistemare tutti gli operatori di distruzione sulla destra di tutti gli operatori di creazione, con un segno meno ogni volta che operatori anticommutanti sono scambiati (infatti il creation-annihilation normal ordering verrà successivamente usato anche per i campi di ghost che vengono introdotti per la quantizzazione funzionale della teoria, i quali sono campi anticommutanti).

Per gli scopi di questa definizione, includiamo p^μ negli operatori di distruzione ed x^μ negli operatori di creazione.

In questa notazione possiamo scrivere:

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \circ \alpha_{m-n}^\mu \alpha_{\mu n} \circ \quad (2.3.12)$$

essendo $a^X=0$.

Quindi abbiamo introdotto due forme di normal ordering, il *conformal normal ordering* $::$ (che è ciò che ci intendiamo quando ci riferiamo al 'normal ordering') ed il *creation-annihilation normal ordering* $\circ \circ$.

Il primo è utile perchè produce operatori i cui OPEs e proprietà delle trasformazioni conformi sono semplici.

Il secondo invece è utile per determinare gli elementi di matrice degli operatori.

La relazione che esiste tra questi due normal ordering è mostrata in [2].

Passiamo ora al caso delle stringhe aperte.

Come spiegato nell'appendice A.3, il world-sheet della teoria di stringa aperta può essere visto come metà del world-sheet della teoria di stringa chiusa.

Nel caso della stringa aperta vengono usate le coordinate complesse:

$$\begin{aligned} z &= -e^{-i\sigma^1 + \sigma^2} \\ \bar{z} &= -e^{i\sigma^1 + \sigma^2} \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Nel caso della stringa aperta, oltre alla (2.2.27), dobbiamo considerare anche le condizioni al contorno, espresse in coordinate complesse.

Se consideriamo le condizioni al contorno di Neumann, ricordando che in termini delle (2.3.13) il bordo si trova sull'asse reale del piano complesso, abbiamo che la (2.2.21) in coordinate complesse è:

$$\partial X^\mu = \bar{\partial} X^\mu \Big|_{z=\bar{z}}. \quad (2.3.14)$$

Inoltre questa volta l'integrale del momento spaziotemporale (2.3.7) questa volta corre solamente sopra un semicerchio, così la normalizzazione ora è:

$$\alpha_0^\mu = (2\alpha')^{1/2} p^\mu. \quad (2.3.15)$$

Da tutto ciò si trova che la soluzione generale è:

$$X^\mu(z, \bar{z}) = X^\mu(z) + \bar{X}^\mu(\bar{z}) = x^\mu - i\alpha' p^\mu \ln|z|^2 + i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{1/2} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} \frac{\alpha_m^\mu}{m} (z^{-m} + \bar{z}^{-m}). \quad (2.3.16)$$

Si vede subito che:

$$\bar{X}^\mu(\bar{z}) = X^\mu(\bar{z}), \quad (2.3.17)$$

cioè le due funzioni hanno la stessa dipendenza negli oscillatori.

Quindi abbiamo dimostrato che la stringa aperta può essere vista come metà della stringa chiusa, cioè considerando solamente il settore olomorfo della stringa chiusa.

Inoltre:

$$L_0 = \alpha' p^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{\mu n}. \quad (2.3.18)$$

I commutatori sono come quelli della stringa chiusa:

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m,-n}\eta^{\mu\nu}, \quad [x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}. \quad (2.3.19)$$

QUANTIZZAZIONE FUNZIONALE E GHOSTS

La quantizzazione funzionale della teoria delle stringhe viene effettuata integrando su tutte le possibili metriche euclidee $g_{ab}(\sigma^1, \sigma^2)$ e su tutti i possibili embeddings $X^\mu(\sigma^1, \sigma^2)$ del world-sheet nello spazio-tempo di Minkowski:

$$\int [dXdg] e^{-S}, \quad (2.3.20)$$

dove S questa volta è:

$$S = S_X + \lambda_1 \chi + \lambda_2 S_c, \quad (2.3.21)$$

con:

$$\begin{aligned}
S_X &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma g^{1/2} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \\
\chi &= \frac{1}{4\pi} \int_M d^2\sigma g^{1/2} R + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} ds k, \\
S_c &= \int_M d^2\sigma g^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Qui M rappresenta il generico world-sheet, R lo scalare di Ricci in due dimensioni, ds il tempo proprio lungo il bordo ∂M del world-sheet nella metrica g^{ab} , e k rappresenta la curvatura geodetica del bordo:

$$k = \pm t^a n_b \nabla_a t^b, \tag{2.3.23}$$

dove t^a è un vettore unitario tangente al bordo ed n^a è un vettore unitario ortogonale a t^a e che punta verso l'esterno.

Il segno + è per un bordo timelike, mentre il segno – è per un bordo spacelike.

χ è localmente una derivata totale in due dimensioni e quindi dipende solamente dalla topologia del world-sheet: esso viene detto *numero di Eulero* del world-sheet.

Invece S_X è l'azione di Polyakov.

Abbiamo considerato tutta l'azione (2.3.21) anziché la sola azione di Polyakov perché la (2.3.21) è l'azione più generale che sia invariante sotto trasformazione di Poincarè D-dimensionale e con rinormalizzabilità di power counting della teoria bi-dimensionale.

χ gioca un ruolo significativo nell'ambito delle interazioni tra le stringhe, ma esso non è importante per i nostri scopi perché in due dimensioni esso è una derivata totale e quindi non contribuisce alle equazioni di campo classiche e non entra nel nostro attuale obiettivo di quantizzare la teoria di stringa libera.

Invece, il termine $\lambda_2 S_c$ è un termine di 'costante cosmologica' bi-dimensionale.

Esso non ha l'invarianza di Weyl di S_X e di conseguenza porta ad equazioni di campo classico inconsistenti.

In modo specifico, la traccia dell'equazione del moto di g^{ab} per $S_X + \lambda_2 S_c$ implica che $g^{ab}=0$, che non è accettabile, a meno di porre $\lambda_2=0$.

Quindi, in conclusione, dobbiamo considerare solamente $S=S_X$.

Però l'integrale funzionale (2.3.20) (con $S=S_X$) non è ben definito.

Infatti esso contiene un enorme sovraconteggio, poiché le configurazioni (X, g) ed (X', g') che sono collegate l'una all'altra dalla simmetria locale $\text{diff} \times \text{Weyl}$ (dove "diff" sta ad indicare la diffeomorphism invariance (2.2.11), mentre "Weyl" sta ad indicare l'invarianza di Weyl (2.2.12)) rappresentano la stessa configurazione fisica (questa ridondanza fa divergere l'integrale funzionale). Pertanto è necessario dividere l'integrale funzionale (2.3.20) per il volume di questo gruppo di simmetria locale:

$$\int_{V_{\text{diff} \times \text{Weyl}}} [dX dg] e^{-S} \equiv Z. \tag{2.3.24}$$

Si può effettuare questa operazione attraverso il gauge-fixing, cioè integrando su una porzione che tagli una sola volta (il che garantisce l'eliminazione della ridondanza) ciascuna classe di

equivalenza di gauge, ottenendo la corretta misura funzionale sulla striscia attraverso il metodo di Faddeev-Popov, proprio come si fa nel caso delle teorie di campo di Yang-Mills.

È da notare che la metrica g_{ab} , essendo una matrice 2×2 simmetrica, ha $N(N+1)/2 = 2(2+1)/2 = 3$ componenti indipendenti, ed inoltre è da notare che, in questa teoria, ci sono tre funzioni di gauge, cioè le due coordinate e la scala locale della metrica.

Così c'è abbastanza libertà di gauge per eliminare l'integrazione sopra la metrica nell'integrale (2.3.24).

Dopo aver fissato la metrica ad una qualche specifica forma funzionale \hat{g} , che viene detta metrica *fiduciaria*, l'integrale funzionale corre lungo una porzione parametrizzata solamente da X^μ .

Allo scopo di ottenere la corretta misura, si segue la procedura di Faddeev-Popov, che porta all'introduzione dei cosiddetti *ghosts* di Faddeev-Popov appunto.

I passaggi sono gli stessi che sono usati per ottenere la misura gauge-fissata nella teoria di Yang-Mills.

Si dimostra [2] che il risultato di questa procedura è:

$$Z[\hat{g}] = \int [dXd b d c] \exp(-S_X - S_g). \quad (2.3.25)$$

dove S_g rappresenta l'azione dei ghosts b e c , che rappresentano delle variabili anticommutanti.

Nel caso particolare in cui la metrica sia stata fissata attraverso il cosiddetto *gauge conforme*:

$$\hat{g}_{ab}(\sigma) = e^{2\omega(\sigma)} \delta_{ab}, \quad (2.3.26)$$

l'azione dei ghosts è:

$$S_g = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b_{z\bar{z}} \nabla_{\bar{z}} c^z + b_{\bar{z}z} \nabla_z c^{\bar{z}}) = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b_{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}} c^z + b_{\bar{z}z} \partial_z c^{\bar{z}}). \quad (2.3.27)$$

La teoria descritta da S_g è una particolare teoria di campo conforme.

Essa è un caso particolare delle cosiddette teorie di campo bc e $\tilde{b}\tilde{c}$.

La teoria di campo bc è definita dalla seguente azione:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c, \quad (2.3.28)$$

dove b e c sono campi anticommutanti, cioè:

$$\{b, b\} = \{b, c\} = \{c, c\} = 0 \quad (2.3.29)$$

(qui b e c sono generici, e nel caso particolare della teoria delle stringhe corrispondono ai ghosts $b_{z\bar{z}}$ e c^z prima introdotti con la (2.3.27)).

La teoria bc è invariante conforme per b e c che si trasformano come tensori con pesi conformi $(h_b, 0)$ e $(h_c, 0)$ (vedere la A.3.42) tali che:

$$h_b = \lambda, \quad h_c = 1 - \lambda, \quad (2.3.30)$$

dove λ è una costante generica.

Dalla (2.3.28) si trovano le seguenti equazioni del moto:

$$\bar{\partial}b(z, \bar{z}) = \bar{\partial}c(z, \bar{z}) = 0 \quad (2.3.31)$$

e quindi $b=b(z)$ e $c=c(z)$, cioè i campi b e c sono entrambi olomorfi.

La corrente conservata associata, attraverso il teorema della Noether, all'invarianza della (2.3.28) sotto trasformazione conforme è il tensore energia-impulso:

$$T(z) = :(\partial b)c: - \lambda \partial(:bc:), \quad (2.3.32)$$

$$\tilde{T}(\bar{z}) = 0.$$

Ovviamente esiste anche una corrispondente teoria antiolomorfa, detta teoria di campo $\tilde{b}\tilde{c}$:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \tilde{b}\partial\tilde{c}, \quad (2.3.33)$$

che è uguale alla teoria olomorfa a parte lo scambio $z \leftrightarrow \bar{z}$.

Inoltre la teoria bc ha un cosiddetta simmetria di *ghost number* $\delta b = -i\epsilon b$, $\delta c = i\epsilon c$.

La corrispondente corrente della Noether è:

$$j = -:bc: . \quad (2.3.34)$$

e viene detta *corrente di ghost number*.

Così come per la (2.3.32), le componenti della corrente j sono separatamente olomorfe ed antiolomorfe, quest'ultima nulla.

I campi b e c hanno espansioni di Laurent:

$$b(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{b_m}{z^{m+\lambda}}, \quad c(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{c_m}{z^{m+1-\lambda}}. \quad (2.3.35)$$

Per essere precisi, queste sono espansioni di Laurent solo nel caso in cui λ sia intero, che è quello che assumiamo.

Dalle espansioni dei prodotti bb , cc e bc (cioè dagli OPE) si ottengono i seguenti anticommutatori:

$$\{b_m, b_n\} = 0, \quad \{c_m, c_n\} = 0, \quad \{b_m, c_n\} = \delta_{m,-n}. \quad (2.3.36)$$

Consideriamo dapprima gli stati che sono annichilati da tutti gli operatori con $n > 0$.

L'algebra degli oscillatori b_0, c_0 genera due tali ground states $|\downarrow\rangle$ e $|\uparrow\rangle$, con le proprietà:

$$\begin{aligned} b_0|\downarrow\rangle &= 0, & b_0|\uparrow\rangle &= |\downarrow\rangle, \\ c_0|\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle, & c_0|\uparrow\rangle &= 0, \\ b_n|\downarrow\rangle &= b_n|\uparrow\rangle = c_n|\downarrow\rangle = c_n|\uparrow\rangle = 0, & \forall n > 0. \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

Lo stato generico è ottenuto agendo su questi stati con i modi con $n < 0$ al massimo una volta ciascuno (perché essi anticommutano).

È convenzionale raggruppare b_0 con gli operatori di distruzione e c_0 con gli operatori di creazione, così indicheremo $|\downarrow\rangle$ come il vuoto di ghost $|0\rangle$ (vedere il paragrafo 2.4 per una trattazione più dettagliata dello stato di vuoto).

La carica conservata associata alla (2.3.34) è:

$$N^g = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} dw j_w = \sum_{n=1}^{+\infty} (c_{-n}b_n - b_{-n}c_n) + c_0b_0 - \frac{1}{2}. \quad (2.3.38)$$

e viene detta semplicemente *ghost number*.

Essa soddisfa:

$$[N^g, b_m] = -b_m, \quad [N^g, c_m] = c_m, \quad (2.3.39)$$

e così conta il numero di eccitazioni c meno il numero di eccitazioni b : ecco spiegato perché a questa carica conservata viene assegnato il nome di ghost number.

I ground states hanno ghost number $\pm 1/2$:

$$N^g|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}|\downarrow\rangle, \quad N^g|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle. \quad (2.3.40)$$

Siccome $T(z)$ ha peso conforme 2, possiamo scrivere:

$$T(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} L_m^g z^{-m-2}, \quad (2.3.41)$$

dove:

$$L_m^g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (m\lambda - n) b_n c_{m-n} + \frac{\lambda(1-\lambda)}{2} \delta_{m,0} \quad (2.3.42)$$

rappresentano i generatori di Virasoro per questa teoria.

Nella (2.3.42) $\lambda(1-\lambda)/2$ rappresenta la costante di normal ordering.

Infine, dall'OPE TT si ricava che la carica centrale (definita nel paragrafo A.3) della teoria bc è:

$$c = -3(2\lambda - 1)^2 + 1, \quad \bar{c} = 0, \quad (2.3.43)$$

(siccome la notazione può risultare un po' ambigua, sottolineiamo il fatto che non bisogna confondere la carica centrale c con il ghost \tilde{c}).

Risultati analoghi valgono per la teoria $\tilde{b}\tilde{c}$, ricordando di scambiare z con \bar{z} .

Tutto questo vale ovviamente nel caso della teoria di campo conforme con compattificazione.

Nel caso invece della teoria non compattificata, le condizioni al contorno sono:

$$c(z) = \tilde{c}(\bar{z}), \quad b(z) = \tilde{b}(\bar{z}), \quad \text{Im}(z) = 0, \quad (2.3.44)$$

scritte in termini delle coordinate complesse dove il bordo è l'asse reale.

Possiamo allora usare il doubling trick per scrivere i campi olomorfi e quelli antiolomorfi nel semipiano superiore in termini dei campi olomorfi nell'intero piano:

$$c(z) \equiv \tilde{c}(\bar{z}'), \quad b(z) \equiv \tilde{b}(\bar{z}'), \quad \text{Im}(z) \leq 0, \quad z' = \bar{z}. \quad (2.3.45)$$

La teoria non compattificata così ha un singolo set di modi di Laurent per ciascun b e c .

Le teorie di campo conformi bc e $\tilde{b}\tilde{c}$ descritte finora sono generali.

Per quanto riguarda la teoria delle stringhe, dalla (2.3.27) si vede che essa è descritta (per quanto riguarda i ghosts) dalle teorie bc e $\tilde{b}\tilde{c}$ nel caso particolare di $\lambda=2$.

Quindi quella che abbiamo trovato con la quantizzazione funzionale della stringa è una teoria di campo conforme di tipo bc con $(h_b, h_c) = (2, -1)$, ed una teoria di campo conforme di tipo $\tilde{b}\tilde{c}$, con $(\tilde{h}_b, \tilde{h}_c) = (2, -1)$.

L'ANOMALIA DI WEYL

Una caratteristica chiave della teoria delle stringhe è che essa non è consistente in tutti i backgrounds di spazio-tempo, ma solamente in quelli che soddisfano certe condizioni.

Per la teoria delle stringhe bosoniche in spazio-tempo piatto, la condizione è $D=26$ (dove D rappresenta il numero di dimensioni spazio-temporali).

Questo fu scoperto dapprima come una patologia delle ampiezze di scattering.

Nel gauge di cono luce, questo emerge come una perdita d'invarianza di Lorentz [2].

La sorgente di questa restrizione è un'anomalia nelle simmetrie di world-sheet locali.

Nel formalismo che stiamo utilizzando, l'anomalia è nella simmetria di Weyl, e per questo viene definita *anomalia di Weyl*.

Essa consiste nel fatto che T^a_a si annulla classicamente (come abbiamo visto in precedenza), ma non si annulla nella teoria quantistica.

Nei calcoli che portano [2] alla (2.3.25) si ignora la possibilità di anomalie.

Ci occorre controllare questo: il path integral gauge-fissato $Z[g]$ è davvero indipendente dalla scelta della metrica fiduciaria?

Cioè, indicando con ζ la combinazione di una trasformazione di coordinate con una trasformazione di Weyl, si ha davvero che:

$$Z[g^\zeta] = Z[g]? \quad (2.3.46)$$

Per convenienza, d'ora in avanti ometteremo il cappuccio su g . Saremo inoltre interessati al path integral (2.3.25) con argomento generico addizionale '...':

$$\langle \dots \rangle_g \equiv \int [dXd b d c] (\dots) \exp(-S[X, b, c, g]) \quad (2.3.47)$$

dove abbiamo indicato:

$$S[X, b, c, g] \equiv S_X + S_g \quad (2.3.48)$$

Osserviamo che il tensore energia-impulso T^{ab} emerge effettuando la variazione infinitesima del path integral (2.3.47) rispetto alla metrica g :

$$\delta_g \langle \dots \rangle_g = -\frac{1}{4\pi} \int d\sigma^1 d\sigma^2 \sqrt{-g} \delta g_{ab} \left\langle \frac{4\pi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S[X, b, c, g]}{\delta g_{ab}} \dots \right\rangle_g = -\frac{1}{4\pi} \int d\sigma^1 d\sigma^2 \sqrt{-g} \delta g_{ab} \langle T^{ab} \dots \rangle_g$$

(2.3.49)

dove all'ultimo passaggio abbiamo usato la (2.2.13) promossa ad operatore. Nella seguente analisi ignoreremo possibili termini di bordo (che invece sono considerati in [2]). Abbiamo appena espresso $\delta_g \langle \dots \rangle_g$ per una generica trasformazione infinitesima δ_g della metrica. Ora consideriamo il caso particolare in cui la trasformazione della metrica sia una trasformazione di Weyl infinitesima:

$$g'_{ab} = \exp(2\delta\omega) g_{ab} = (1 + 2\delta\omega) g_{ab} = g_{ab} + 2\delta\omega g_{ab} = g_{ab} + \delta_W g_{ab} \quad (2.3.50)$$

Dalla (2.3.49) ne segue allora che (basta sostituire la trasformazione generica δ_g con la trasformazione specifica δ_W):

$$\delta_g \langle \dots \rangle_g = -\frac{1}{2\pi} \int d\sigma^1 d\sigma^2 \sqrt{g} \delta\omega \langle T^a_a \dots \rangle_g, \quad (2.3.51)$$

dove abbiamo usato anche il fatto che $g_{ab} T^{ab} = T^a_a$.

Quindi dalla (2.3.51) si vede che l'invarianza di Weyl con argomento generico '...' è equivalente a domandarsi se il tensore energia-impulso ha traccia nulla.

L'azione classica è invariante di Weyl (come abbiamo visto in precedenza), ma nella teoria quantistica la traccia potrebbe essere non-nulla perché non riusciamo a trovare un regolatore che sia pienamente gauge-invariante.

La traccia deve essere invariante sotto diffeomorfismi e sotto trasformazione di Poincaré, poiché abbiamo preservato queste simmetrie, e deve annullarsi nel caso piatto poiché sappiamo (in base a quanto detto in precedenza) che la teoria è invariante conforme.

Questo lascia l'unica possibilità:

$$T_a^a(\sigma^1, \sigma^2) = a_1 R(\sigma^1, \sigma^2) \quad (2.3.52)$$

dove a_1 è una costante da determinare ($a_1=0$ nel caso classico, ma nel caso quantistico non necessariamente) ed R rappresenta lo scalare di Ricci del world-sheet.

Termini con più di due derivate sono proibiti per ragioni dimensionali.

In unità di lunghezza del world-sheet, g_{ab} ed X^μ sono entrambi adimensionali, così la costante a_1 nell'equazione (2.3.52) è anch'essa adimensionale.

Termini con più derivate avrebbero un coefficiente con potenze positive della lunghezza di cutoff usata per definire il path integral, e quindi si annullano nel limite in cui il cutoff tende a zero.

In [2] viene calcolato il valore della costante a_1 , nel caso di world-sheet approssimativamente piatto, facendo uso della (A.3.46), il che porta ad ottenere:

$$a_1 = -\frac{c}{12}, \quad (2.3.53)$$

dove c rappresenta la carica centrale della teoria.

La teoria di world-sheet consiste delle X^μ , con carica centrale D , e dei ghosts, la cui carica centrale (2.3.43) è -26 per $\lambda=2$ (ricordiamoci infatti che $\lambda=2$ è quanto è emerso in precedenza dalla quantizzazione funzionale per la teoria delle stringhe), il che dà:

$$c = c^X + c^g = D - 26. \quad (2.3.54)$$

Quindi si vede che $T_a^a=0 \Leftrightarrow D=26$, cioè la teoria è invariante sotto trasformazione di Weyl se e solo se lo spazio-tempo ha 26 dimensioni, che è la stessa condizione che emerge [2] per l'invarianza di Lorentz nel caso del gauge di cono-luce.

Quando l'anomalia di Weyl è non-nulla, scelte di gauge diverse sono inequivalenti, e come avviene con le teorie di gauge anomale, ogni scelta porta ad una patologia come la perdita di covarianza o la perdita di unitarietà.

Nel gauge di cono-luce, per esempio, scegliere diversi assi spazio-temporali richiede un cambio di gauge, così l'anomalia di Weyl viene tralata in una anomalia di Lorentz.

C'è un'altra strada che si potrebbe provare: ignorare l'invarianza di Weyl e trattare solamente l'invarianza sotto diffeomorfismi come una simmetria di gauge.

Però si dimostra che in questo caso non si ha invarianza di Lorentz $(D+1)$ -dimensionale e quindi questa teoria non è utile per i nostri scopi, che consistono nel comprendere la fisica nella nostra parte dell'universo.

2.4 LO SPETTRO DELLA STRINGA QUANTISTICA

Gli stati vibrazionali stabili delle stringhe rappresentano le particelle fisiche: a seconda del grado di eccitazione della stringa vengono rappresentate particelle differenti.

Così la teoria delle stringhe sembrerebbe fornire un modo semplice ed elegante per render conto della diversità delle particelle di materia e mediatrici di forze osservate nell'universo, dato che teoricamente essa è in grado di rappresentarle tutte attraverso questo meccanismo.

LA QUANTIZZAZIONE BRST DELLA STRINGA

Nel gauge conforme (2.3.26), i campi di world-sheet sono gli X^μ ed i ghosts di Faddeev-Popov b_{ab} e c^a (questi sono i ghosts che compaiono nella (2.3.27)).

Lo spazio di Hilbert è più grande dello spettro fisico effettivo della stringa: i D sets di oscillatori α^μ includono oscillazioni non fisiche del sistema di coordinate, e ci sono oscillatori di ghost.

Come si verifica in generale nei gauge covarianti, ci sono stati di norma negativa dagli oscillatori timelike (perchè il commutatore è proporzionale alla metrica di spaziotempo $\eta_{\mu\nu}$), ed anche dai ghosts.

Lo spazio fisico effettivo è più piccolo.

Per vedere come identificare questo spazio più piccolo, consideriamo l'ampiezza sul cilindro infinito per qualche stato iniziale $|i\rangle$ affinché questo si propaghi fino ad un qualche stato finale $|f\rangle$.

Supponiamo di aver usato inizialmente le simmetrie locali per fissare la metrica ad una forma $g_{ab}(\sigma)$.

Consideriamo ora un gauge differente, con metrica $g_{ab}(\sigma) + \delta g_{ab}(\sigma)$.

Un'ampiezza fisica non dovrebbe dipendere da questa scelta.

Certamente, per un cambio nella metrica sappiamo come cambia il path integral.

Dalla (2.3.51) sappiamo che deve essere:

$$\delta \langle f|i \rangle = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma g(\sigma)^{1/2} \delta g_{ab}(\sigma) \langle f|T^{ab}(\sigma)|i \rangle. \quad (2.4.1)$$

Affinchè questa variazione si annulli per cambiamenti arbitrari nella metrica, ci occorre che sia:

$$\langle \psi | T^{ab}(\sigma) | \psi' \rangle = 0 \quad (2.4.2)$$

per stati fisici arbitrari $|\psi\rangle, |\psi'\rangle$.

Quando variamo il gauge dobbiamo tenere in considerazione il cambiamento nel determinante di Faddeev-Popov, quindi il tensore energia-impulso nell'elemento di matrice (2.4.2) è dato dalla somma dei contributi degli X^μ e dei ghosts:

$$T_{ab} = T_{ab}^X + T_{ab}^g. \quad (2.4.3)$$

Gli X^μ possono essere sostituiti da una CFT più generale (che chiameremo CFT della *materia*), nel qual caso:

$$T_{ab} = T_{ab}^m + T_{ab}^g. \quad (2.4.4)$$

Però in realtà la condizione (2.4.2) non è sufficiente a garantire l'invarianza di gauge. Essa implica invarianza per scelte fissate arbitrarie di g_{ab} , ma questo non è il gauge più generale (per esempio, nel gauge di cono-luce, per effettuare la quantizzazione della stringa, vengono imposte [2] alcune condizioni su X^μ ed alcune condizioni su g_{ab}).

Per considerare la variazione più generale possibile della condizione di gauge, dobbiamo supporre che δg_{ab} sia un *operatore*, cioè che esso dipenda dai campi nel path integral.

La condizione d'invarianza completa viene derivata nel cosiddetto *formalismo di quantizzazione BRST*, descritto in generale nell'appendice A.4.

La procedura di quantizzazione BRST esposta in tale appendice può essere applicata al caso particolare della stringa (invece la sua applicazione al caso della particella puntiforme è riportata in [2]).

In questo caso, la trasformazione BRST (A.4.6) si dimostra [2] essere:

$$\begin{aligned} \delta_B X^\mu &= i\varepsilon (c\partial + \tilde{c}\bar{\partial}) X^\mu, \\ \delta_B b &= i\varepsilon (T^X + T^g), \quad \delta_B \tilde{b} = i\varepsilon (\tilde{T}^X + \tilde{T}^g), \\ \delta_B c &= i\varepsilon (c\partial + \tilde{c}\bar{\partial}) c, \quad \delta_B \tilde{c} = i\varepsilon (c\partial + \tilde{c}\bar{\partial}) \tilde{c}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

dove T^X è dato dalla (2.3.1), mentre T^g è dato dalla (2.3.32) nel caso di $\lambda=2$ (ricordiamo che nel caso della teoria delle stringhe b e c rappresentano rispettivamente i ghosts b_{ZZ} e c^Z introdotti con la (2.3.27)).

Alla somma dell'azione di Polyakov e dell'azione di ghost, aggiungiamo il termine di gauge-fixing:

$$\frac{i}{4\pi} \int d^2\sigma g^{1/2} B^{ab} (\delta_{ab} - g_{ab}). \quad (2.4.6)$$

Qui B_{ab} è un campo ausiliario detto *ghost di Weyl*.

La trasformazione $\delta_B B_{ab} = \varepsilon B_{ab}$ diventa la (2.4.5) dopo aver integrato su B_{ab} ed aver utilizzato l'equazione del moto di g_{ab} al fine di sostituire B_{ab} nella trasformazione.

Il ghost di Weyl è giusto un moltiplicatore di Lagrange, che rende b_{ab} di traccia nulla.

Sostituendo le X^μ con una generica CFT di materia, la trasformazione BRST dei campi di materia è una trasformazione conforme con $v(z)=c(z)$ (dove $v(z)$ è stato introdotto con la (A.3.22)), mentre T^m sostituisce T^X nella trasformazione di b .

Il teorema della Noether fornisce la corrente BRST:

$$j_B = cT^m + \frac{1}{2} : cT^g : + \frac{3}{2} \partial^2 c = cT^m + \frac{1}{2} : bc\partial c : + \frac{3}{2} \partial^2 c, \quad (2.4.7)$$

e in modo corrispondente per \tilde{j}_B .

Il termine finale nella corrente è una derivata totale e non contribuisce alla carica BRST; è stato aggiunto a mano per far diventare un tensore la corrente BRST.

Gli OPE della corrente BRST con i campi di ghost e con un campo tensoriale di materia generico sono:

$$\begin{aligned}
j_B(z)b(0) &\sim \frac{3}{z^3} + \frac{1}{z^2} j^g(0) + \frac{1}{z} T^{m+g}(0), \\
j_B(z)c(0) &\sim \frac{1}{z} c\partial c(0), \\
j_B(z)\mathcal{O}^m(0) &\sim \frac{\hbar}{z^2} c\mathcal{O}^m(0) + \frac{1}{z} [h(\partial c)\mathcal{O}^m(0) + c\partial\mathcal{O}^m(0)].
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

I poli semplici riflettono la trasformazione BRST (2.4.5) di questi campi. L'operatore BRST è:

$$Q_B = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint dz j_B - \oint d\bar{z} \tilde{j}_B \right). \tag{2.4.9}$$

Si dimostra che gli OPE (2.4.8) implicano che:

$$\{Q_B, b_m\} = L_m^m + L_m^g. \tag{2.4.10}$$

In termini dei modi di ghost:

$$Q_B = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n L_{-n}^m + \tilde{c}_n \tilde{L}_{-n}^m) + \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \frac{(m-n)}{2} \circ (c_m c_n b_{-m-n} + \tilde{c}_m \tilde{c}_n \tilde{b}_{-m-n}) \circ + a^B (c_0 + \tilde{c}_0). \tag{2.4.11}$$

La costante di ordering è $a^B = a^g = -1$.

C'è un'anomalia nella simmetria di gauge quando $c^m \neq 26$, così ci aspettiamo una qualche rottura nel formalismo BRST.

La corrente BRST è ancora conservata: tutti i termini nella corrente (2.4.7) sono analitici per ogni valore della carica centrale.

Comunque, essa non è più nilpotente in generale:

$$\{Q_B, Q_B\} = 0 \Leftrightarrow c^m = 26. \tag{2.4.12}$$

Questo risultato è dimostrato in [2].

Sappiamo che nel caso di D campi scalari liberi di massa nulla si ha che $c^m = c^X = D$, e quindi abbiamo trovato che $\{Q_B, Q_B\} = 0 \Leftrightarrow D = 26$.

Quindi abbiamo ottenuto un risultato che conoscevamo già, quindi la teoria delle stringhe ha una sua consistenza interna.

LO STATO DI VUOTO

Per costruire lo spazio di Fock, prima dobbiamo definire lo stato di vuoto (ricordiamo che nonostante questo stato venga chiamato “stato di vuoto”, esso in realtà rappresenta il *ground state* della stringa, cioè lo stato di minima energia, poichè questa teoria delle stringhe è formulata in prima quantizzazione. Lo stato di vuoto propriamente detto è quello delle teorie di campo invece, che rappresenta la configurazione senza particelle).

Alla sezione successiva dimostreremo che lo stato di vuoto, sia per le stringhe chiuse che per quelle aperte, è un tachione, il che ha portato poi allo sviluppo delle teorie di campo di stringa.

In questa sezione spieghiamo più chiaramente cosa s'intende per lo stato di vuoto introdotto quando abbiamo derivato l'espansione dei modi nel paragrafo 2.3.

Siccome l'azione della teoria è:

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b_{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}} c^z + b_{\bar{z}z} \partial_z c^{\bar{z}}), \quad (2.4.14)$$

si vede che i campi X^μ sono disaccoppiati dai campi di ghost.

Ne segue allora che lo stato di vuoto $|0\rangle$ della teoria è:

$$|0\rangle = |0\rangle_X \otimes |0\rangle_g, \quad (2.4.15)$$

dove $|0\rangle_X$ e $|0\rangle_g$ rappresentano rispettivamente lo stato di vuoto dei campi X^μ e lo stato di vuoto dei ghosts.

Da questo ne segue allora che:

$$F = F_X \otimes F_g, \quad (2.4.16)$$

dove F rappresenta lo spazio di Fock.

Indichiamo con V un generico operatore di peso conforme h :

$$V = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{V_n}{z^{n+h}}. \quad (2.4.17)$$

Un generico stato di vuoto $|\text{vacuum}\rangle$ è definito come quello stato che viene annullato da tutti i campi V_n con $n \geq 1-h$, cioè:

$$V_n |\text{vacuum}\rangle = 0, \quad n \geq 1-h \quad (2.4.18)$$

(daremo poi una spiegazione fisica di questa definizione).

Per esempio, nel caso particolare dei campi X^μ , si ha che $|\text{vacuum}\rangle = |0\rangle_X$.

Se definiamo $|\omega\rangle$ come quello stato (che postuliamo esistere) tale che:

$$\alpha_n^\mu |\omega\rangle = 0, \quad \forall n \geq 0, \quad (2.4.19)$$

dato che $\partial X^\mu(z)$ ha peso conforme 1 (ricordiamo che gli α_n^μ sono i coefficienti dello sviluppo di $\partial X^\mu(z)$, come si vede dalla (2.3.4)) e ricordando la definizione che abbiamo dato di $|\text{vacuum}\rangle$, ne segue che in questo caso possiamo identificare:

$$|\omega\rangle = |0\rangle_X. \quad (2.4.20)$$

Pertanto abbiamo che:

$$\alpha_n^\mu |0\rangle_X = 0, \quad \forall n \geq 0, \quad (2.4.21)$$

cioè gli α_n^μ con $n \geq 0$ sono i distruttori, e quindi gli α_n^μ con $n < 0$ sono i creatori.

In altri termini, prima non sapevamo quali tra gli α_n^μ fossero i creatori e quali i distruttori, ed allora abbiamo definito lo stato di vuoto $|0\rangle_X$ in modo che i distruttori fossero gli α_n^μ con $n \geq 0$.

Cosa analoga per gli $\tilde{\alpha}_n^\mu$, cioè per il settore anti-olomorfo.

La definizione che abbiamo dato del generico $|\text{vacuum}\rangle$ è fisicamente ragionevole, come spiegato di seguito.

Nell'infinito passato asintotico ($\tau = -\infty$) possiamo immaginare di avere il vuoto, che poi facciamo evolvere (attraverso una propagazione libera) e poi valutiamo all'infinito futuro asintotico ($\tau = +\infty$).

Nel piano complesso delle coordinate z, \bar{z} , $\tau = -\infty$ è mappato nell'origine, e quindi è l'origine che dobbiamo definire come $|\text{vacuum}\rangle$.

Come possiamo interpretare la condizione $V_n |\text{vacuum}\rangle = 0 \quad \forall n \geq 1-h$?

Osserviamo che:

$$0 = V_n |\text{vacuum}\rangle = \oint_{C_0} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+h-1} V(z) |\text{vacuum}\rangle, \quad \forall n \geq 1-h, \quad (2.4.22)$$

dove C_0 rappresenta un circuito attorno all'origine nel piano complesso.

Siccome $n \geq 1-h$, ne segue che l'esponente della z dentro all'integrale è ≥ 0 , il che, unito al fatto che l'integrale è nullo, comporta che $V(z)|\text{vacuum}\rangle$ non abbia singolarità.

Cioè $V(z)|\text{vacuum}\rangle$ non porta nessun numero quantico, il che in parte spiega perchè la definizione data per $|\text{vacuum}\rangle$ sia fisicamente ragionevole.

Per comprendere la bontà della definizione di $|\text{vacuum}\rangle$, facciamo altre osservazioni.

Ricordiamo che prima abbiamo visto che $\alpha_n^\mu |0\rangle_X = 0 \quad \forall n \geq 0$, dato che $\partial X^\mu(z)$ ha peso conforme 1.

Però, in base alla definizione di $|\text{vacuum}\rangle$, gli α_n^μ non sono gli unici che possono annullare $|0\rangle_X$.

Infatti, nell'ambito dei campi X^μ , dobbiamo ricordare che il tensore energia-impulso ha peso conforme 2, e quindi deve essere anche che:

$$L_n |0\rangle_X = 0, \quad n \geq -1. \quad (2.4.23)$$

Lo stesso vale per il settore anti-olomorfo.

Quindi, in particolare, L_{-1} , L_0 , L_1 annichilano lo stato di vuoto $|0\rangle_X$.

Dalla teoria di campo conforme è noto però che L_{-1} , L_0 , L_1 formano una sottoalgebra e generano il cosiddetto gruppo $SL(2, \mathbb{C})$.

Pertanto $|0\rangle_X$ è $SL(2, \mathbb{C})$ -invariante (e non invariante sotto tutta l'algebra di Virasoro).

Osserviamo che $L_0 |0\rangle_X = 0$ ed $\tilde{L}_0 |0\rangle_X = 0$ implicano che $H_X |0\rangle_X = 0$, dove H_X rappresenta l'hamiltoniana delle X^μ .

Quindi $|0\rangle_X$ ha energia nulla, cioè è lo stato a minima energia.

Infatti, se applichiamo a $|0\rangle_X$ gli operatori di creazione (e cioè gli α_n^μ con $n < 0$), otteniamo:

$$\alpha_{-k_1}^{\mu_1} \alpha_{-k_2}^{\mu_2} \dots \alpha_{-k_N}^{\mu_N} \bar{\alpha}_{-\bar{k}_1}^{\bar{\mu}_1} \bar{\alpha}_{-\bar{k}_2}^{\bar{\mu}_2} \dots \bar{\alpha}_{-\bar{k}_N}^{\bar{\mu}_N} |0\rangle_X, \quad k_j, \bar{k}_j > 0. \quad (2.4.24)$$

Si scopre che:

$$\left[L_0, \alpha_{-k_1}^{\mu_1} \alpha_{-k_2}^{\mu_2} \dots \alpha_{-k_N}^{\mu_N} \bar{\alpha}_{-\bar{k}_1}^{\bar{\mu}_1} \bar{\alpha}_{-\bar{k}_2}^{\bar{\mu}_2} \dots \bar{\alpha}_{-\bar{k}_N}^{\bar{\mu}_N} \right] |0\rangle_X \quad (2.4.25)$$

è autostato di H_X , e quindi:

$$E = \sum_j k_j + \sum_j \bar{k}_j, \quad k_j, \bar{k}_j > 0, \quad (2.4.26)$$

che è maggiore di zero.

Quindi $|0\rangle_X$ è lo stato di minima energia.

Ora vogliamo costruire il vuoto di ghost $|0\rangle_g$.

Usando la definizione di $|\text{vacuum}\rangle$ e ricordando che b e c hanno, per $\lambda=2$, pesi conformi pari a 2 e -1 rispettivamente (da cui si vede che $1-h$ vale -1 e 2 rispettivamente), otteniamo che:

$$\begin{aligned} b_n |0\rangle_g' &= 0, & n \geq -1, \\ c_n |0\rangle_g' &= 0, & n \geq 2, \\ L_n^g |0\rangle_g' &= 0, & n \geq -1. \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

da cui si vede che $|0\rangle_g'$ è annichilato da L_{-1}^g , L_0^g , L_1^g e quindi è $SL(2, \mathbb{C})$ -invariante.

Abbiamo scritto $|0\rangle_g'$ con un apostrofo perchè esso in realtà non è il vero stato di vuoto di ghost.

Infatti, in modo analogo a quanto visto nel caso di $|0\rangle_X$, si vede che $|0\rangle_g'$ ha energia nulla, però $E=0$ non è l'energia più bassa possibile per i ghosts.

Infatti, partendo da $|0\rangle_g'$, possiamo costruire uno stato con $E < 0$:

$$c_1 \bar{c}_1 |0\rangle'_g. \quad (2.4.28)$$

Infatti, osservando che:

$$\begin{aligned} [L_0^g, c_1] &= -c_1, \\ [\bar{L}_0^g, \bar{c}_1] &= -\bar{c}_1, \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

(come si può ricavare dalla (2.3.42) e dalle regole di commutazione elementari), ne segue che:

$$H_g |0\rangle'_g = (L_0^g + \bar{L}_0^g) c_1 \bar{c}_1 |0\rangle'_g = -2c_1 \bar{c}_1 |0\rangle'_g. \quad (2.4.30)$$

Quindi $|0\rangle'_g$ è autostato di H_g , con autovalore $E = -2 < 0$.

Si osserva che ogni stato che viene creato usando operatori $c_0, c_{-1}, c_{-2}, \dots$ (cioè operatori diversi da c_1) ha sempre $E > -2$.

Quindi $E = -2$ è l'energia di ghost minima.

Pertanto il vero stato di vuoto di ghost è:

$$|0\rangle_g = c_1 \bar{c}_1 |0\rangle'_g. \quad (2.4.31)$$

$|0\rangle_g$ altri non è che lo stato $|\downarrow\rangle$ definito attraverso le (2.3.37).

Dobbiamo definire anche $\langle 0|_g$.

Se definiamo:

$$\langle 0|_g \equiv (|0\rangle_g)^\dagger = (c_1 \bar{c}_1 |0\rangle'_g)^\dagger = \langle 0|'_g c_1 \bar{c}_1, \quad (2.4.32)$$

si ottiene che:

$$\langle 0|0\rangle_g = 0, \quad (2.4.33)$$

e quindi non sarebbe normalizzabile.

Pertanto questa definizione non può essere corretta.

Si dimostra che la definizione corretta è:

$$\langle 0|_g = \langle 0|'_g c_{-1} \bar{c}_{-1} c_0 \bar{c}_0, \quad (2.4.34)$$

dalla quale si ricava che $\langle 0|0\rangle_g \neq 0$ e così si possono normalizzare gli stati in modo che:

$$\langle 0|'_g c_{-1} \bar{c}_{-1} c_0 \bar{c}_0 c_1 \bar{c}_1 |0\rangle'_g = 1. \quad (2.4.35)$$

OPERATORI DI VERTICE E SPETTRO DI MASSA DELLA STRINGA QUANTISTICA

Per determinare lo spettro della stringa ci manca ancora una nozione: quella degli operatori di vertice [2].

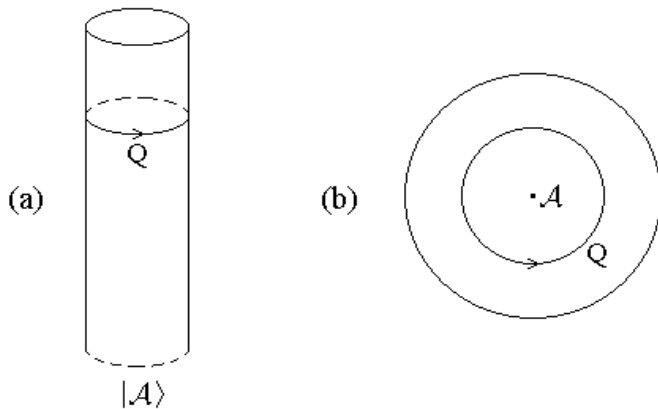
Nella teoria di campo quantistica, c'è da una parte lo spazio degli stati della teoria, e dall'altra parte il set degli operatori locali.

Nella teoria di campo conforme esiste un semplice ed utile isomorfismo tra essi, con la CFT quantizzata su un cerchio.

Consideriamo il world-sheet di una stringa chiusa che si propaga in modo libero, cioè consideriamo un cilindro semi-infinito nella coordinata $w = \sigma + i\tau$:

$$0 \leq \text{Re } w \leq 2\pi, \quad w \sim w + 2\pi, \quad \text{Im } w \leq 0, \quad (2.4.36)$$

che viene mappato nel disco unitario nella coordinata $z = \exp(-iw)$, come mostrato nella seguente figura:



Per definire il path integral nella coordinata w bisogna in particolare specificare la condizione al contorno per $\text{Im } w \rightarrow -\infty$.

Cioè bisogna specificare lo stato iniziale.

Nella coordinata z , $\text{Im } w = -\infty$ viene mappato nell'origine, così esso è equivalente a specificare il comportamento dei campi in quel punto.

In effetti, questo definisce un operatore locale nell'origine, noto come *operatore di vertice* associato a quello stato.

Andando nell'altra direzione, il path integral sul disco con un operatore \mathcal{A} nell'origine viene mappato nel path integral sul cilindro con uno stato iniziale $|\mathcal{A}\rangle$ specificato.

Per teorie di campo libere è possibile determinare facilmente la forma di questo isomorfismo.

Supponiamo di avere una carica conservata Q che agisce su uno stato $|\mathcal{A}\rangle$, come mostrato nella parte (a) della precedente figura.

È possibile trovare il corrispondente operatore locale usando l'OPE per determinare l'integrale di contorno della parte (b) della precedente figura.

Usiamo questo per identificare lo stato $|1\rangle_X$ corrispondente all'operatore unità per le X^μ .

Con nessun operatore nell'origine, ∂X^μ e $\bar{\partial} X^\mu$ sono rispettivamente olomorfi ed antiolomorfi dentro al contorno Q nella parte (b) della figura.

Gli integrali di contorno (2.3.5) che definiscono α_m^μ ed $\tilde{\alpha}_m^\mu$ per $m \geq 0$ allora non hanno poli e quindi si annullano.

Così $|1\rangle_X$ è annichilato da questi modi.

Questo identifica lo stato $|1\rangle_X$ con lo stato fondamentale delle X^μ :

$$|1\rangle_X = |0\rangle_X, \quad (2.4.37)$$

con la normalizzazione scelta per convenienza.

Ora consideriamo, per esempio, lo stato $\alpha_{-m}^\mu |1\rangle_X$ con m positivo (ricordiamo che gli α_{-m}^μ con $m > 0$ sono operatori di creazione).

Passando alla parte (b) della figura con $Q = \alpha_{-m}^\mu$ che circonda l'operatore unità, i campi sono olomorfi dentro al contorno, e così possiamo valutare:

$$\alpha_{-m}^\mu = \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \oint \frac{dz}{2\pi} z^{-m} \partial X^\mu(z) \rightarrow \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \frac{i}{(m-1)!} \partial^m X^\mu(0) \quad (2.4.38)$$

per $m \geq 1$.

Nella (2.4.38), al primo passaggio abbiamo usato la (2.3.5), mentre al secondo passaggio abbiamo usato il teorema dei residui per calcolare l'integrale.

Quindi dalla (2.4.38) ne segue che:

$$\alpha_{-m}^\mu |1\rangle_X \cong \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \frac{i}{(m-1)!} \partial^m X^\mu(0), \quad m \geq 1. \quad (2.4.39)$$

dove il simbolo \cong significa "isomorfo".

In modo analogo:

$$\tilde{\alpha}_{-m}^\mu |1\rangle_X \cong \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \frac{i}{(m-1)!} \bar{\partial}^m X^\mu(0), \quad m \geq 1. \quad (2.4.40)$$

Si dimostra poi che questa corrispondenza continua a valere quando α_m^μ ed $\tilde{\alpha}_m^\mu$ agiscono su un generico stato $|\mathcal{A}\rangle$.

Facendo agire più operatori di creazione sullo stato $|1\rangle_X$, si ottiene che:

$$\begin{aligned} & \alpha_{-m_1}^{\mu_1} \alpha_{-m_2}^{\mu_2} \dots \alpha_{-m_N}^{\mu_N} \tilde{\alpha}_{-\bar{m}_1}^{\bar{\mu}_1} \tilde{\alpha}_{-\bar{m}_2}^{\bar{\mu}_2} \dots \tilde{\alpha}_{-\bar{m}_N}^{\bar{\mu}_N} |1\rangle_X \cong \\ & \cong \left(\prod_{k=1}^N \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \frac{i}{(m_k-1)!} \partial^{m_k} X^{\mu_k}(0) \right) \left(\prod_{k=1}^N \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \frac{i}{(\bar{m}_k-1)!} \bar{\partial}^{\bar{m}_k} X^{\bar{\mu}_k}(0) \right) \equiv \phi(0). \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

$\phi(0)$ è il generico operatore di vertice al vuoto delle X^μ che si ottiene dall'applicazione di soli operatori di creazione.

Lo stesso metodo può essere applicato alla teoria bc.

Ci specializziamo al caso $\lambda=2$.

Dalle espansioni di Laurent (2.3.35) ne segue che:

$$\begin{aligned} b_m |1\rangle_g &= 0, & m \geq -1, \\ c_m |1\rangle_g &= 0, & m \geq 2. \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

Infatti, così come dalla (2.3.4) segue la (2.3.5), allo stesso modo dalla (2.3.35) segue che:

$$b_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+\lambda-1} b(z) = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} b(z) \quad (2.4.43)$$

(dove al secondo passaggio abbiamo usato il fatto che $\lambda=2$), e quindi:

$$b_m |1\rangle_g \cong \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} b(z) = 0, \quad \forall m \geq -1, \quad (2.4.44)$$

dove al secondo passaggio abbiamo usato il fatto che $z^{m+1}b(z)$ è analitico per $m \geq -1$.

Cosa analoga vale per i c_m con $m \geq 2$.

È da osservare che a causa delle traslazioni negli esponenti delle espansioni di Laurent che provengono dai pesi conformi di b e c , l'operatore unità non viene mappato in un ground state.

Piuttosto, le relazioni (2.4.42) determinano che:

$$|1\rangle_g = b_{-1} |0\rangle_g, \quad (2.4.45)$$

Gli operatori di vertice degli operatori di creazione invece sono:

$$\begin{aligned} b_{-m} |1\rangle_g &\cong \frac{1}{(m-2)!} \partial^{m-2} b(0), & m \geq 2, \\ c_{-m} |1\rangle_g &\cong \frac{1}{(m+1)!} \partial^{m+1} c(0), & m \geq -1. \end{aligned} \quad (2.4.46)$$

Infatti, ragionando come fatto prima, si ottiene per esempio che:

$$b_{-m} = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{-m+1} b(z), \quad (2.4.47)$$

dove questo integrale viene calcolato attraverso il metodo dei residui.

Cosa analoga vale per c_{-m} .

Ora possiamo costruire lo spettro fisico della stringa.

Gli stati eccitati vengono costruiti attraverso gli operatori di creazione, che a loro volta possono essere espressi attraverso i corrispondenti operatori di vertice.

Quindi per creare gli stati fisici dobbiamo trovare tutti gli opportuni operatori di vertice al vuoto.

Solo alcuni operatori di vertice sono buoni.

A quali condizioni deve soddisfare un operatore di vertice per essere buono, cioè affinché esso descriva uno stato fisico?

1) Un operatore di vertice non deve creare ghosts o stati longitudinali, perchè questi non sono fisici.

Quindi lo stato:

$$\phi(0)|0\rangle \equiv |\phi\rangle \quad (2.4.48)$$

(dove $\phi(0)$ rappresenta il generico operatore di vertice, mentre $|0\rangle = |0\rangle_X \otimes |0\rangle_g$) deve essere annichilato da Q_B , cioè deve essere che $Q_B|\phi\rangle = 0$, dato che la (A.4.10) è la condizione che definisce gli stati fisici.

Osservando che anche $Q_B|0\rangle = 0$ (perchè il normal ordering mette a destra tutti gli operatori di distruzione, che annichilano $|0\rangle$), ne segue allora che:

$$[Q_B, \phi(z, \bar{z})] = 0. \quad (2.4.49)$$

2) Gli operatori di vertice ci devono dare le ampiezze di correlazione:

$$\langle 0 | \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n | 0 \rangle = \int [D X D b D c] e^{-S} \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n. \quad (2.4.50)$$

Vogliamo che la presenza di $\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n$ nel path integral non generi anomalie.

Si dimostra (in modo simile a quanto visto al paragrafo 2.3 per cancellare l'anomalia di Weyl) che la condizione che garantisce l'assenza di anomalie è che $\phi(z, \bar{z})$ sia un campo invariante sotto trasformazione conforme, il che è immediatamente garantito se $\phi(z, \bar{z})$ è un campo conforme di peso (1,1) (la definizione di peso conforme è data con la (A.3.42)).

3) Gli operatori di vertice devono soddisfare la richiesta d'invarianza di Lorentz e di Poincarè in 26 dimensioni.

Usando questi tre criteri (ricordiamoci che siamo nell'ambito della stringa chiusa), si trova che esistono due tipi di operatori di vertice:

a) operatore di vertice integrato, cioè del tipo:

$$\phi = \int d^2 z \phi(z, \bar{z}); \quad (2.4.51)$$

b) operatore di vertice puntuale, cioè del tipo:

$$\phi_0(z=0, \bar{z}=0), \quad \text{con} \quad \phi_0(z, \bar{z}) = f(\phi(z, \bar{z})), \quad (2.4.52)$$

dove f è una funzione da determinare.

Per esempio, nel caso particolare in cui $\phi(z, \bar{z})$ non dipenda dai ghosts, allora si dimostra che:

$$\phi_0(z, \bar{z}) =: c(z) \bar{c}(\bar{z}) \phi(z, \bar{z}) : \quad (2.4.53)$$

La stragrande maggioranza degli operatori di vertice non dipende dai ghosts (uno dei pochi operatori di vertice che dipendono dai ghosts è quello del dilatone, una particella che ricaveremo più avanti dallo spettro di massa della stringa chiusa).

Le tre condizioni prima elencate, applicate per esempio all'operatore di vertice integrato ϕ , ci diranno come deve essere fatto il campo $\phi(z, \bar{z})$.

Si dimostra che il più generale campo $\phi(z, \bar{z})$ che le soddisfa è:

$$\phi(z, \bar{z}) = \xi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \dots \bar{\mu}_N} : \partial^{n_1} X^{\mu_1} \partial^{n_2} X^{\mu_2} \dots \partial^{n_N} X^{\mu_N} \bar{\partial}^{\bar{n}_1} X^{\bar{\mu}_1} \bar{\partial}^{\bar{n}_2} X^{\bar{\mu}_2} \dots \bar{\partial}^{\bar{n}_N} X^{\bar{\mu}_N} e^{ip \cdot X} :, \quad (2.4.54)$$

con:

$$\sum_j n_j = \sum_j \bar{n}_j \equiv \mathcal{M}, \quad (2.4.55)$$

dove ξ è un tensore di ordine $2N$ covariante, il cui scopo è quello di saturare gli indici delle coordinate X in modo da rendere covariante $\phi(z, \bar{z})$.

Il termine $\exp(ip \cdot X)$ nella (2.4.54) serve per creare stati di stringa eccitati di momento p .

Si dimostra poi che l'OPE di $\phi(z, \bar{z})$ con il tensore energia-impulso è:

$$\begin{aligned} T(z') \phi(z, \bar{z}) &\sim \frac{1}{(z'-z)^4} \xi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j \dots \mu_N \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \dots \bar{\mu}_N} \eta^{\mu_j \mu_j} + \frac{1}{(z'-z)^3} p^{\mu_j} \xi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j \dots \mu_N \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \dots \bar{\mu}_N} + \\ &+ \frac{1}{(z'-z)^2} (2(\mathcal{M}-1) + p^2 + 1) \phi(z, \bar{z}) + \frac{1}{z'-z} \partial \phi(z, \bar{z}). \end{aligned} \quad (2.4.56)$$

Cosa analoga vale per l'OPE di $\phi(z, \bar{z})$ con $\bar{T}(\bar{z})$.

Affinchè $\phi(z, \bar{z})$ sia di peso conforme $(1,1)$, l'OPE deve però essere del tipo:

$$T(z') \phi(z, \bar{z}) \sim \frac{1}{(z'-z)^2} \phi(z, \bar{z}) + \frac{1}{z'-z} \partial \phi(z, \bar{z}) + \dots, \quad (2.4.57)$$

e cosa analoga per $\bar{T}(\bar{z})$.

Quindi, dal confronto tra la (2.4.56) e la (2.4.57), ne segue che deve essere:

$$\begin{aligned} \xi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j \dots \mu_N \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \dots \bar{\mu}_N} \eta^{\mu_i \mu_j} &= 0, \\ p^{\mu_j} \xi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j \dots \mu_N \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \dots \bar{\mu}_N} &= 0, \end{aligned} \quad (2.4.58)$$

mentre dall'OPE con $\bar{T}(\bar{z})$ ne segue che:

$$\begin{aligned} \xi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \dots \bar{\mu}_i \dots \bar{\mu}_j \dots \bar{\mu}_N} \eta^{\bar{\mu}_i \bar{\mu}_j} &= 0, \\ p^{\bar{\mu}_j} \xi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \dots \bar{\mu}_j \dots \bar{\mu}_N} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.59)$$

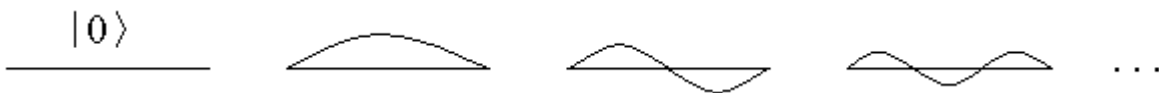
In realtà questo ci dice solamente che $\phi(z, \bar{z})$ è un campo conforme di peso $2(\mathcal{M}-1)+p^2+1$, e quindi, affinché esso abbia peso 1, dobbiamo imporre che sia:

$$2(\mathcal{M}-1)+p^2+1=1. \quad (2.4.60)$$

Essendo però $m^2 = -p^2$, ne segue che:

$$m^2 = -p^2 = 2(\mathcal{M}-1) = 2\left(\sum_j n_j - 1\right) = 2\left(\sum_j \bar{n}_j - 1\right). \quad (2.4.61)$$

Lo stato di vuoto $|0\rangle$ rappresenta la stringa nel suo stato fondamentale, ed applicando degli oscillatori a questo stato, cioè degli opportuni operatori di vertice, si costruiscono degli stati eccitati:



Lo stato più semplice che si può costruire da queste configurazioni è:

$$\phi(z, \bar{z}) = e^{ip \cdot X} : \quad (2.4.62)$$

Questo è uno scalare di spaziotempo, cioè non ha una struttura tensoriale, e corrisponde ad avere uno stato di vuoto con momento p , cioè corrisponde allo stato $|0; p\rangle$.

Questo stato ha $\mathcal{M}=0$ e quindi, per la (2.4.61), ha $m^2 = -2$.

Pertanto abbiamo appena dimostrato che la teoria delle stringhe, nello spettro di stringa chiusa, contiene un tachione, cioè una particella scalare a massa immaginaria.

Il secondo stato più semplice ha invece una struttura tensoriale:

$$\phi(z, \bar{z}) = \xi_{\mu\nu} : \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ip \cdot X} :, \quad (2.4.63)$$

che ha $\mathcal{M}=1$, e quindi $m^2=0$.

Abbiamo quindi ottenuto una particella di massa nulla e momento p .
Le condizioni (2.4.58) e (2.4.59) in questo caso diventano:

$$\begin{aligned} p^\mu \xi_{\mu\nu} &= 0, \\ p^\nu \xi_{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (2.4.64)$$

che rappresenta la usuale condizione di trasversalità che si incontra nella teoria dei campi.
Se decomponiamo $\xi_{\mu\nu}$ nella sua parte simmetrica $\xi_{(\mu\nu)}$, nella sua parte antisimmetrica $\xi_{[\mu\nu]}$ e nella sua parte di traccia $\xi^\mu{}_\mu$, possiamo osservare che, dal punto di vista dello spaziotempo, queste rappresentano rispettivamente una particella tensoriale di spin 2, un tensore antisimmetrico di rango 2, ed uno scalare.

$\xi_{(\mu\nu)}$ viene pertanto identificato con la metrica $g_{\mu\nu}$ dello spaziotempo: esso rappresenta il cosiddetto *gravitone*, cioè il mediatore della forza gravitazionale.

Questo spiega perchè la teoria delle stringhe è uno dei candidati per la teoria della gravità quantistica (ricordiamo che nell'introduzione generale abbiamo visto come l'esigenza di formulare una teoria di gravità quantistica è stata la causa che ha fatto riproporre la teoria delle stringhe, dopo che questa era stata abbandonata a favore della QCD per lo studio della forza nucleare forte).

Invece $\xi_{[\mu\nu]}$ viene solitamente indicato attraverso il simbolo $B_{\mu\nu}$, mentre $\xi^\mu{}_\mu$ viene solitamente indicato attraverso il simbolo Φ e rappresenta il cosiddetto *dilatone*.

Gli stati successivi dello spettro di massa della stringa chiusa hanno $\mathcal{M} \geq 2$ e quindi massa diversa da zero: essi rappresentano pertanto la parte massiva dello spettro.

Per quanto riguarda invece la stringa aperta (che è il caso che ci interessa ai fini dello studio della teoria di campo di stringa che affronteremo nei capitoli 3 e 4), osserviamo che possiamo ricavarne lo spettro di massa partendo da quello appena ottenuto per la stringa chiusa.

Infatti, nella sezione sull'espansione dei modi, abbiamo visto che la stringa aperta può essere vista come metà della stringa chiusa, e cioè solamente il settore olomorfo, e quindi possiamo ottenere lo spettro di massa della stringa aperta partendo da quello ricavato precedentemente per la stringa chiusa.

Il più generale operatore di vertice integrato della stringa aperta è:

$$\phi = \int_{\mathbb{R}} dz \phi(z) \quad (2.4.65)$$

(dove \mathbb{R} rappresenta l'asse reale del piano complesso), con $\phi(z)$ campo conforme di peso 1 dato da:

$$\phi(z) = \xi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N} : \partial^{n_1} X^{\mu_1} \partial^{n_2} X^{\mu_2} \dots \partial^{n_N} X^{\mu_N} e^{ip \cdot X} : \quad (2.4.66)$$

Per avere peso conforme (1,1), le condizioni sono le stesse della stringa chiusa (questa volta $\mathcal{M} = \sum n_j$).

Si ottiene pertanto che lo stato più semplice della stringa aperta è:

$$\phi(z) =: e^{ip \cdot X} : \quad (2.4.67)$$

che ha $m^2 = -2$, e quindi è un tachione.

Invece il secondo stato più semplice questa volta è vettoriale:

$$\phi(z) = \xi_\mu : \partial X^\mu e^{ip \cdot X} :, \quad (2.4.68)$$

che ha $m^2 = 0$ e $p^\mu \xi_\mu = 0$.

Quindi questo stato è vettoriale di massa nulla e trasverso al momento.

Pertanto esso viene interpretato come un fotone.

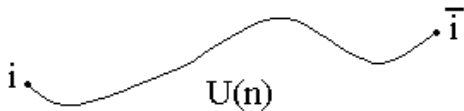
Infine si hanno tutti gli stati massivi della stringa aperta.

In base a quanto visto finora, la stringa aperta sembra capace di generare solo campi con invarianza di gauge di tipo 1, cioè senza “colore”.

Come si fa a generare campi di gauge generici, cioè non abeliani?

Questo è un input che dobbiamo aggiungere a mano.

Cioè aggiungiamo a mano degli indici i ed \bar{i} agli estremi della stringa aperta, come mostrato nella seguente figura:



L'indice i è un indice di colore relativo alla rappresentazione fondamentale di $U(n)$, mentre l'indice \bar{i} è un indice relativo alla rappresentazione antifondamentale (cioè la coniugata della rappresentazione fondamentale) di $U(n)$.

Questi due indici vengono detti *fattori di Chan-Paton*.

In questo modo si ha che:

$$\phi^{i\bar{i}}(z) = \xi_\mu^{i\bar{i}} : \partial X^\mu e^{ip \cdot X} :, \quad (2.4.69)$$

dove:

$$\xi_\mu^{i\bar{i}} = \xi_\mu^a (T^a)^{i\bar{i}}, \quad a = 1, \dots, n^2, \quad (2.4.70)$$

con le matrici T^a che rappresentano i generatori del gruppo $U(n)$.

Comunque abbiamo constatato che né le stringhe chiuse né quelle aperte contengono fermioni, cioè la teoria delle stringhe che abbiamo sviluppato non è capace di descrivere i fermioni.

Per questo motivo essa viene detta *teoria delle stringhe bosoniche*.

2.5 COMPATTIFICAZIONE DELLE EXTRA DIMENSIONI SPAZIALI

Nel paragrafo 1.5 abbiamo visto come lo spettro di massa di una teoria di campo per la particella puntiforme venga modificato qualora si debba tenere conto di dimensioni spaziali addizionali.

Ma abbiamo anche detto che per una teoria di campo non è necessario introdurre delle dimensioni spaziali addizionali, poiché una teoria di campo è consistente per qualsiasi numero di dimensioni, sia a livello classico che quantistico.

Invece, dall'analisi appena conclusa, abbiamo visto che la teoria delle stringhe, a livello classico, è consistente per qualsiasi numero di dimensioni, mentre a livello quantistico no, dato che essa richiede $D=26$ (nel caso bosonico).

Pertanto, a differenza di una teoria di campo, l'operazione di compattificazione delle dimensioni spaziali addizionali è indispensabile per giustificare il perché noi ne vediamo solamente 3.

Anche nella teoria delle stringhe la compattificazione causa un'alterazione dello spettro di massa, che dipende dal fatto che si sta considerando una stringa chiusa od una aperta.

Siccome abbiamo detto che la teoria delle stringhe è descritta, dal punto di vista del world-sheet, da una teoria di campo conforme, noi andremo a studiare gli effetti della compattificazione su questa teoria.

Nella teoria delle stringhe si ha che $D=26$ e quindi bisogna compattificare 22 dimensioni spaziali.

Per semplicità consideriamo il caso in cui solamente X^{25} è periodico:

$$X^{25} \cong X^{25} + 2\pi R. \quad (2.5.1)$$

Osserviamo poi che, per $\mu=0, \dots, 25$, la (2.3.8), cioè:

$$X^\mu(z, \bar{z}) = X^\mu(z) + \bar{X}^\mu(\bar{z}) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0^\mu \ln z - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\tilde{\alpha}_0^\mu \ln \bar{z} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha_n^\mu}{z^n} + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{\bar{z}^n} \right), \quad (2.5.2)$$

essendo $z=\exp(\tau+i\sigma)$, diventa:

$$X^\mu(z, \bar{z}) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(\alpha_0^\mu + \tilde{\alpha}_0^\mu)\tau + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(\alpha_0^\mu - \tilde{\alpha}_0^\mu)\sigma + \text{oscil.}, \quad (2.5.3)$$

dove con "oscil." intendiamo la parte di oscillatori nello sviluppo di X^μ , ovvero la parte che dipende dagli α_n^μ ed $\tilde{\alpha}_n^\mu$ per $n \neq 0$.

Ora analizziamo il caso della stringa chiusa.

Per avere coordinate periodiche (cioè di stringa chiusa) nelle dimensioni $\mu=0, \dots, 24$, cioè nelle direzioni non compattificate, bisogna porre:

$$X^\mu(\sigma + 2\pi) = X^\mu(\sigma), \quad \mu = 0, \dots, 24. \quad (2.5.4)$$

Questa, assieme alla (2.5.3), implica che:

$$\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p^\mu, \quad \mu = 0, \dots, 24. \quad (2.5.5)$$

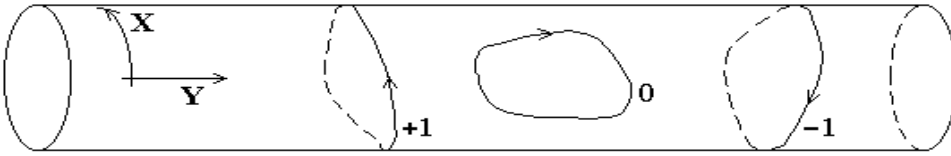
Invece nella direzione $\mu=25$ questa condizioni si rilassa un po', a causa della compattificazione:

$$X^{25}(\sigma + 2\pi) = X^{25}(\sigma) + 2\pi R w, \quad w \in \mathbb{Z}. \quad (2.5.6)$$

Questa, assieme alla (2.5.3), implica che:

$$\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(\alpha_0^{25} - \tilde{\alpha}_0^{25})2\pi = 2\pi w R. \quad (2.5.7)$$

L'intero w è detto *winding number* ed è una caratteristica tipica della teoria delle stringhe (cioè non esiste un analogo del winding number nel caso della particella puntiforme). Stati con winding number $+1$, 0 , e -1 sono mostrati nella seguente figura:



Inoltre gli stati di stringa devono assumere un valore unico sotto l'identificazione (2.5.1).

Pertanto l'operatore $\exp(2\pi i R p^{25})$, il quale trasla le stringhe una volta attorno alla dimensione periodica, deve lasciare invariati gli stati, così il momento del centro di massa della stringa è quantizzato:

$$p^{25} = \frac{n}{R} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} (\alpha_0^{25} + \tilde{\alpha}_0^{25}) \equiv \frac{1}{2} (p_L^{25} + p_R^{25}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.5.8)$$

dove i pedici L ed R stanno per left e right, cioè rappresentano i modi che si propagano verso sinistra o verso destra sulla stringa chiusa, cioè rappresentano le componenti olomorfe ed antiolomorfe di p^{25} .

Questo è analogo a quanto succede in teoria dei campi (come abbiamo visto nel paragrafo 1.5).

Dalle (2.5.7) e (2.5.8) ne segue che:

$$\alpha_0^{25} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p_L^{25} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left(\frac{n}{R} + \frac{wR}{\alpha'} \right), \quad \tilde{\alpha}_0^{25} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p_R^{25} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left(\frac{n}{R} - \frac{wR}{\alpha'} \right), \quad (2.5.9)$$

Inoltre:

$$m^2 = -p^\mu p_\mu = \frac{2}{\alpha'} (\alpha_0^{25})^2 + \frac{4}{\alpha'} (N-1) = \frac{2}{\alpha'} (\tilde{\alpha}_0^{25})^2 + \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N}-1), \quad (2.5.10)$$

dove:

$$N = \sum_{i=2}^{25} \sum_{n=1}^{+\infty} n N_{in}, \quad \tilde{N} = \sum_{i=2}^{25} \sum_{n=1}^{+\infty} n \tilde{N}_{in}, \quad (2.5.11)$$

con N_{in} ed \tilde{N}_{in} che rappresentano il numero di volte che gli operatori di creazione α_{-n}^i ed $\tilde{\alpha}_{-n}^i$ rispettivamente sono applicati allo stato di vuoto al fine di creare lo stato in questione di massa m .

Dalle (2.5.9) e (2.5.10) ne segue che:

$$m^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2), \quad nw + N - \tilde{N} = 0. \quad (2.5.12)$$

Da questa formula si vede che, per $R \rightarrow \infty$, il termine $w^2 R^2 / \alpha'^2$ diventa infinitamente massivo per gli stati con $w \neq 0$ (questi stati sono detti *winding states*), mentre il momento compatto n^2 / R^2 tende ad uno spettro continuo.

Questo è proprio quello che ci aspetterebbe per una dimensione non compatta.

Guardando invece al limite opposto, cioè $R \rightarrow 0$, si ottiene una sorpresa.

Gli stati con momento compatto (cioè gli stati con $n \neq 0$) diventano infinitamente massivi, ma il termine $w^2 R^2 / \alpha'^2$ ora tende ad un continuo.

Quindi, per $R \rightarrow 0$, lo spettro di massa della stringa chiusa sembra tendere a quello di una dimensione non compatta (cioè quello che abbiamo ottenuto per $R \rightarrow \infty$).

Questo comportamento è completamente differente da quello che si ottiene in teoria dei campi, nella quale c'è momento compatto n ma non esiste il winding number w , e nella quale quindi nessuno stato può diventare leggero per $R \rightarrow 0$.

Infatti, per la stringa chiusa, i limiti $R \rightarrow 0$ ed $R \rightarrow \infty$ sono fisicamente equivalenti, come si vede dal fatto che lo spettro (2.5.12) è invariante sotto la seguente trasformazione:

$$R \rightarrow R' = \frac{\alpha'}{R} \quad \text{ed} \quad n \leftrightarrow w. \quad (2.5.13)$$

(dove \leftrightarrow sta ad indicare che dobbiamo scambiare n con w e w con n).

Infatti, sotto la (2.5.13), si vede che la (2.5.12) diventa:

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2) \rightarrow \frac{w^2}{R'^2} + \frac{n^2 R'^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2) = \\ &= \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{n^2 \alpha'^2}{\alpha'^2 R^2} + \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2) = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2) = m^2 \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

e che la condizione $nw + N - \tilde{N} = 0$ rimane inalterata.

Si dimostra che questa equivalenza vale anche nel caso in cui vengano considerate le interazioni di stringa.

Si osserva poi che effettuare la trasformazione (2.5.13) equivale ad effettuare le seguenti trasformazioni:

$$p_L^{25} \rightarrow p_L^{25} \quad \wedge \quad p_R^{25} \rightarrow -p_R^{25}. \quad (2.5.15)$$

Infatti, sotto la (2.5.13), la (2.5.9) diventa:

$$\begin{aligned} p_L^{25} &= \frac{n}{R} + \frac{wR}{\alpha'} \rightarrow \frac{w}{R'} + \frac{nR'}{\alpha'} = \frac{wR}{\alpha'} + \frac{n\alpha'}{\alpha'R} = \frac{n}{R} + \frac{wR}{\alpha'} = p_L^{25} \\ p_R^{25} &= \frac{n}{R} - \frac{wR}{\alpha'} \rightarrow \frac{w}{R'} - \frac{nR'}{\alpha'} = \frac{wR}{\alpha'} - \frac{n\alpha'}{\alpha'R} = -\frac{n}{R} + \frac{wR}{\alpha'} = -p_R^{25} \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

e così pure la (2.5.15) implica la (2.5.13), e quindi le due sono equivalenti. Siccome abbiamo dimostrato che, utilizzando i momenti p_L^{25} e $-p_R^{25}$, lo spettro di massa rimane inalterato, e siccome utilizzare p_L^{25} e $-p_R^{25}$ equivale (passando allo spazio delle coordinate) ad utilizzare $X_L^{25}(z)$ e $-X_R^{25}(\bar{z})$, ne segue che, utilizzando la coordinata:

$$X'^{25}(z, \bar{z}) \equiv X_L^{25}(z) - X_R^{25}(\bar{z}), \quad (2.5.17)$$

lo spettro di massa rimane inalterato rispetto a quello che si ottiene descrivendo la teoria attraverso $X_L^{25}(z)$ ed $X_R^{25}(\bar{z})$, e quindi attraverso la coordinata $X^{25}(z, \bar{z}) = X_L^{25}(z) + X_R^{25}(\bar{z})$.

Quindi l'unico cambiamento nella teoria di campo conforme che si verifica utilizzando X'^{25} al posto di X^{25} è che questo include il cambiamento di segno (2.5.15), il quale cambia lo spettro da quello di una teoria con raggio R a quello di una teoria con raggio R' .

Quindi queste due rappresentano la stessa teoria, una scritta in termini di X^{25} ed una in termini di X'^{25} .

Questa equivalenza è nota come *T-dualità*.

Per quanto riguarda invece la stringa aperta, esiste una nuova caratteristica, che non compare nel caso della stringa chiusa, nota con il nome di *Wilson line* (per i lettori che conoscono già l'argomento, ricordiamo che la Wilson line, nel caso semplificato in cui si consideri una teoria di gauge di tipo $U(1)$, rappresenta la grandezza gauge invariante che quantifica la non-periodicità del campo di gauge A_{25} lungo la direzione spaziale x^{25} . Invece per i lettori che non sono a conoscenza dell'argomento si consiglia di vedere [2], dato che non possiamo dilungarci troppo sull'argomento). Considerando una stringa aperta con fattori di Chan-Paton $U(n)$ agli estremi, si dimostra [2] che il suo spettro di massa è:

$$m^2 = p_{25}^2 + \frac{1}{\alpha'}(N-1) = \frac{(2\pi l - \theta_j + \theta_i)^2}{4\pi^2 R^2} + \frac{1}{\alpha'}(N-1), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.5.18)$$

dove $l \in \mathbb{Z}$, mentre θ_i e θ_j sono delle costanti dovute alla Wilson line ed ai fattori di Chan-Paton $U(n)$ (introdotti al paragrafo 2.4).

Le stringhe aperte con condizioni al contorno di Neumann non hanno alcun numero quantico comparabile al winding number w delle stringhe chiuse in quanto, avendo gli estremi liberi (come

dettato dalle condizioni al contorno di Neumann), possono sempre essere srotolate nella dimensione periodica.

Ma essendo w proprio il numero di volte con cui una stringa è arrotolata attorno alla dimensione periodica, ne segue che in questo caso w non è definito.

Pertanto, considerando il limite per $R \rightarrow 0$ dello spettro di massa (2.5.18), gli stati con momento p_{25} non nullo avranno massa divergente, ma questa volta, a differenza del caso della stringa chiusa, non si forma un nuovo continuo di stati (infatti nella stringa chiusa il continuo era dovuto al termine $w^2 R^2 / \alpha'^2$, che nella stringa aperta non esiste a causa dell'assenza di w).

Questo comportamento della stringa aperta è analogo a quello della teoria dei campi (dato che anche nella teoria dei campi non esiste w): gli stati risultanti si muovono in uno spazio-tempo 25-dimensionale.

Un apparente paradosso si forma sapendo (come viene dimostrato in [2]) che, per essere consistenti, teorie con stringhe aperte hanno sempre anche stringhe chiuse, e quindi nel limite di $R \rightarrow 0$ le stringhe chiuse si muovono in 26 dimensioni, ma quelle aperte solo in 25.

È possibile comprendere quello che sta succedendo nel seguente modo.

L'interno della stringa aperta è costituito dalla stessa 'materia prima' della stringa chiusa, e quindi dovrebbe anch'esso vibrare in 26 dimensioni.

Quello che distingue la stringa aperta da quella chiusa sono le sue due estremità, pertanto sono esse che devono essere ristrette ad un iperpiano 25-dimensionale.

Infatti, dobbiamo ricordare che la T-dualità viene descritta utilizzando la nuova coordinata X^{25} definita dalla (2.5.17).

Allora si ha che:

$$\partial_n X^{25} = -i \partial_t X^{25}, \quad (2.5.19)$$

con n che rappresenta la normale e t la tangente al bordo.

Quindi le condizioni di Neumann sulla coordinata originale X^{25} diventano condizioni di Dirichlet sulla coordinata duale X^{25} : la coordinata X^{25} di ciascun estremo della stringa aperta è fissata, il che definisce un iperpiano 25-dimensionale.

In altri termini, abbiamo visto che se si impongono delle condizioni al contorno di Neumann sulla coordinata X^{25} , allora la coordinata duale X^{25} avrà condizioni al contorno di Dirichlet, ovvero, per quanto spiegato nell'introduzione generale, definirà una D-brana (nello spazio duale), o più precisamente una D24-brana (questo vale nel caso in cui venga T-dualizzata una sola coordinata spaziale, mentre nel caso in cui vengano T-dualizzate 25-p dimensioni spaziali si ottiene una Dp-brana).

Avendo ora una condizione al contorno di Dirichlet, è possibile definire un winding number per la stringa aperta (solo nello spazio duale però).

Considerando una teoria dotata di Wilson lines, si dimostra che il cambiamento totale nella coordinata duale tra i due estremi della stringa (che ricordiamo avere lunghezza π) è:

$$\Delta X^{25} = X^{25}(\pi) - X^{25}(0) = -(2\pi l - \theta_j + \theta_i) R'. \quad (2.5.20)$$

In altre parole, l'estremo della stringa aperta nello stato i si trova nella posizione:

$$X^{25} = \theta_i R'. \quad (2.5.21)$$

Quindi abbiamo scoperto che nello spazio duale ci sono n iperpiani a differenti posizioni, mentre l definisce il numero di volte in cui la stringa è arrotolata attorno alla dimensione periodica nello spazio duale (e quindi nello spazio duale l rappresenta un winding number).

Dalle (2.5.18) e (2.5.20) ne segue che lo spettro di massa della stringa aperta può anche essere espresso nel seguente modo:

$$m^2 = \left(\frac{\Delta X^{125}}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(N-1). \quad (2.5.22)$$

Questa formula ci sarà utile nel paragrafo 2.6.

Ora vogliamo analizzare la possibilità di osservare sperimentalmente queste dimensioni spaziali extra.

Si dimostra che, in un mondo con d dimensioni spaziali espanse, la forza gravitazionale e quella elettrostatica prodotte da sorgenti puntiformi variano come $1/r^{d-1}$.

Invece, un mondo con d dimensioni spaziali ma con solamente 3 espanse, cioè con $d-3$ dimensioni spaziali compatte, appare 3-dimensionale a piccole energie, cioè a grandi distanze r .

Esso appare d dimensionale solamente ad alte energie, cioè solamente a piccole distanze.

Pertanto in questo caso la forza gravitazionale e quella elettrostatica subiranno una alterazione dalla legge 3-dimensionale $1/r^2$ solamente a piccoli valori di r .

Da qui ne segue pertanto che si potrebbe verificare l'esistenza di dimensioni spaziali extra andando a verificare sperimentalmente il comportamento di queste due forze per piccole distanze.

Concentriamoci adesso sulla forza gravitazionale.

In questo ambito sono importanti tre costanti fondamentali:

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}, \quad c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}, \quad \hbar = 1.06 \times 10^{-34} \frac{kg \cdot m^2}{s}. \quad (2.5.23)$$

Però nello studio della gravitazione è a volte conveniente usare il sistema di unità "planckiane".

Siccome abbiamo tre unità di base, cioè quelle di lunghezza, tempo e massa, possiamo trovare nuove unità di lunghezza, tempo e massa tali che le tre costanti fondamentali, cioè G , c ed \hbar , assumano il valore uno in queste unità di misura.

Queste unità sono chiamate lunghezza di Planck l_p , tempo di Planck t_p , e massa di Planck m_p , rispettivamente.

In queste unità sia ha che:

$$G = 1 \cdot \frac{l_p^3}{m_p t_p^2}, \quad c = 1 \cdot \frac{l_p}{t_p}, \quad \hbar = 1 \cdot \frac{m_p l_p^2}{t_p}. \quad (2.5.24)$$

Queste equazioni possono essere risolte per l_p , t_p ed m_p in termini di G , c ed \hbar :

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1.61 \times 10^{-33} \text{ cm}, \quad t_p = \frac{l_p}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5.4 \times 10^{-44} \text{ s}, \quad m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.17 \times 10^{-5} \text{ g}.$$

(2.5.25)

Questi numeri rappresentano le scale alle quali gli effetti di gravità quantistica relativistica possono essere importanti.

È da sottolineare il fatto che queste sono le unità che valgono per un mondo 3-dimensionale, cioè per un mondo con 3 dimensioni spaziali.

Invece, dato un mondo con 3 dimensioni spaziali espanse e $d-3$ dimensioni spaziali compattificate, ci interessa sapere qual è la relazione tra la lunghezza di Planck 3-dimensionale l_p , la lunghezza di Planck che si avrebbe se tutte le d dimensioni spaziali fossero estese (lunghezza che chiamiamo $l_p^{(d)}$), e le dimensioni compattificate.

Si scopre che tale relazione è:

$$l_C = l_p^{(d)} \left(\frac{l_p^{(d)}}{l_p} \right)^{\frac{2}{d-3}}, \quad (2.5.26)$$

dove l_C rappresenta la circonferenza delle dimensioni spaziali compattificate.

Gli attuali acceleratori di particelle hanno esplorato la fisica fino a distanze dell'ordine di 10^{-16} cm. Pertanto $l_p^{(d)}$ deve essere più piccolo di questa grandezza.

Se supponiamo per esempio che $l_p^{(d)} \sim 10^{-18}$ cm, quanto varrà l_C ?

Dalla formula (2.5.26) si vede che la risposta dipende dal valore di d .

Per esempio, per $d=4$ si ha che $l_C \sim 10^{12}$ cm $\sim 10^7$ km.

Una dimensione extra così grande sarebbe stata scoperta molto tempo fa, e quindi $d=4$ non può essere corretto.

Se proviamo allora a porre $d=5$, si ottiene che $l_C \sim 10^{-3}$ cm.

Questo è molto più interessante.

Potrebbero esserci delle dimensioni extra lunghe 10^{-3} cm?

Si potrebbe pensare che questa lunghezza sia ancora troppo grande, dato che perfino i microscopi riescono a vedere a distanze più piccole di questa.

Inoltre, come detto prima, gli attuali acceleratori di particelle riescono ad esplorare la fisica fino a distanze dell'ordine di 10^{-16} cm, che sono molto inferiori a 10^{-3} cm.

Sorprendentemente è possibile che esistano dimensioni spaziali grandi che non siamo ancora riusciti ad osservare.

Come detto prima, l'esistenza di dimensioni addizionali può essere confermata testando la legge della forza che dà l'attrazione gravitazionale tra due masse.

Infatti, per distanze più piccole di l_C , secondo la teoria delle stringhe il mondo dovrebbe essere di dimensione $d > 3$ e quindi questo comporterebbe un'alterazione rispetto alla legge $1/r^2$ che vale per $d=3$.

Per esempio, se si scoprisse che la forza di attrazione tra due masse fosse del tipo $1/r^4$, questo sarebbe consistente con l'esistenza di due extra dimensioni spaziali compattificate.

Il problema è che è molto difficile testare la forza di gravità a piccole distanze.

Infatti la forza di gravità è estremamente debole e le forze elettriche spurie devono essere cancellate con molta precisione.

Motivate principalmente dalla possibile esistenza di grandi dimensioni extra, la legge della forza gravitazionale è stata testata fino a distanze dell'ordine di un decimo di millimetro, senza riscontrare alcuna alterazione dalla legge $1/r^2$.

Comunque $l_C \sim 10^{-3}$ cm è ancora consistente con la distanza testata di un decimo di millimetro.

Si potrebbe allora pensare di testare delle forze diverse da quella gravitazionale.

Per esempio la forza elettrostatica è stata testata a distanze molto più piccole, senza mostrare alcuna alterazione dalla legge $1/r^2$.

Per esempio, lo scattering Rutherford delle particelle alfa contro i nuclei atomici ha confermato la legge $1/r^2$ fino a distanze di 10^{-11} cm.

Questo sembrerebbe allora escludere l'esistenza di grandi dimensioni spaziali extra.

In realtà la possibilità di grandi dimensioni spaziali extra sopravvive comunque nella teoria delle stringhe.

Infatti nella teoria delle stringhe il nostro mondo spaziale potrebbe essere un iperpiano 3-dimensionale trasverso alle extra dimensioni.

Questo iperpiano è quello che nell'introduzione generale abbiamo chiamato D3-brana.

Nell'introduzione generale abbiamo visto che le stringhe aperte hanno la proprietà di avere i loro estremi attaccati alle D-brane.

In molti modelli fenomenologici costruiti nella teoria delle stringhe, sono le fluttuazioni delle stringhe aperte che danno origine ai leptoni, a quark, ed ai campi di gauge, incluso il campo elettromagnetico (come mostreremo al paragrafo 2.6).

Ne segue che questi campi sono legati alla D3-brana e *non risentono* delle dimensioni spaziali extra. Se il campo elettromagnetico vive sulla D-brana, le linee del campo elettrico di una carica rimangono sulla D-brana e non finiscono in mezzo alle dimensioni extra.

Pertanto la legge della forza elettrostatica non viene mai alterata, cioè rimane sempre $1/r^2$ indipendentemente dalla scala di distanza.

Invece le stringhe chiuse non sono legate alle D-brane, e quindi la gravità, che emerge dalle stringhe chiuse, è *affetta* dalle dimensioni extra.

2.6 D-BRANE

Nell'introduzione generale abbiamo spiegato il concetto di D-brana, ed ora vogliamo esporne alcune importanti caratteristiche.

Lo facciamo nel caso particolare in cui la coordinata X^{25} della stringa bosonica sia compattificata (e T-dualizzata) e nel caso in cui presenti alle estremità il fattore di Chan-Paton $U(n)$ (in modo da poter usare i risultati del paragrafo 2.5), ma comunque i risultati che mostreremo possono essere generalizzati al caso in cui venga compattificato un numero qualsiasi di dimensioni spaziali.

Nell'introduzione generale abbiamo visto come gli estremi delle stringhe aperte siano collegati alle D-brane.

Ora vogliamo determinare quali sono gli stati di stringa aperta che presentano massa nulla.

A tal fine osserviamo che la massa (2.5.22) si annulla solamente per $N=1$ e $\Delta X^{25}=0$.

Essendo però ΔX^{25} dato dalla (2.5.20), si vede che $\Delta X^{25}=0$ equivale a dire che $l=0$ (cioè winding number nullo nello spazio duale) e che $\theta_i=\theta_j$ (cioè, per la (2.5.21), che entrambe gli estremi della stringa aperta sono situati sullo stesso iperpiano).

Gli stati che presentano queste caratteristiche (e quindi gli stati con massa nulla) sono i seguenti:

$$\alpha_{-1}^{\mu} |0; k; ii\rangle, \quad \text{con} \quad \mu = 0, \dots, 24, \quad \text{ed} \quad \alpha_{-1}^{25} |0; k; ii\rangle. \quad (2.6.1)$$

Infatti ricordiamo che il pedice -1 sta ad indicare un operatore di creazione che porta allo stato $|0; k; ii\rangle$ una singola (cioè $N=1$) eccitazione, e che lo stato $|0; k; ii\rangle$ rappresenta il ground state (cioè $N=0$, cioè il tachione) della stringa (da non confondere con lo stato di vuoto, cioè con lo stato in cui non esistono stringhe, perché questa teoria delle stringhe è formulata in prima quantizzazione e non in seconda) con momento k e con $\theta_i=\theta_j$.

Lo stato $\alpha_{-1}^{25}|0;k;ii\rangle$ è stato distinto dagli stati $\alpha_{-1}^{\mu}|0;k;ii\rangle$, con $\mu=0, \dots, 24$, poiché la dimensione 25 è l'unica compatta.

I 25 stati $\alpha_{-1}^{\mu}|0;k;ii\rangle$ hanno polarizzazione tangente all'iperpiano, mentre lo stato $\alpha_{-1}^{25}|0;k;ii\rangle$ ha polarizzazione perpendicolare.

Questi sono ovviamente gli stessi stati di massa nulla della teoria originale, dato che abbiamo visto che la T-dualità dà semplicemente un'immagine differente dello stesso spettro.

In particolare, lo stato $\alpha_{-1}^{25}|0;k;ii\rangle$ di questa teoria T-duale era il campo di gauge nella direzione compatta della teoria originale, ed ha una semplice ed importante interpretazione nella teoria T-duale: esso è una coordinata collettiva per la forma dell'iperpiano.

Questo è lo stesso fenomeno che si verifica con lo spazio-tempo.

Si inizia con le stringhe in un background piatto e si scopre che uno stato di massa nulla di stringa chiusa corrisponde a fluttuazioni della geometria.

Qui invece abbiamo trovato dapprima un iperpiano piatto, e poi abbiamo scoperto che un certo stato di stringa aperta corrisponde a fluttuazioni della sua forma.

Non dovremmo essere sorpresi del fatto che l'iperpiano è diventato dinamico.

Infatti la teoria delle stringhe contiene la gravità, ed un'onda gravitazionale passante attraverso l'iperpiano curverà lo spazio-tempo, e quindi l'iperpiano difficilmente potrà rimanere rigido.

Ora vogliamo mostrare l'azione di una Dp-brana, e lo facciamo nel caso in cui il raggio duale R' venga fatto tendere all'infinito.

Abbiamo appena visto che i campi di massa nulla situati su una Dp-brana sono un vettore $U(1)$ più 25-p scalari che descrivono le fluttuazioni.

Questi campi della Dp-brana sono poi in interazione con i campi di stringa chiusa di massa nulla del background.

Introduciamo sulla Dp-brana delle coordinate ξ^a , con $a=0, \dots, p$.

I campi sulla Dp-brana sono gli embedding $X^\mu(\xi)$ ed il campo di gauge $A_a(\xi)$.

Così come l'azione di una particella puntiforme è data dalla lunghezza della sua world-line e l'azione di una stringa è data dalla area del suo world-sheet, in modo analogo l'azione di una Dp-brana è in generale data dal volume del suo world-volume.

Così l'azione della Dp-brana dovrebbe essere:

$$S_p = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det G_{ab}}, \quad (2.6.2)$$

dove:

$$G_{ab}(\xi) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} G_{\mu\nu}(X(\xi)) \quad (2.6.3)$$

rappresenta la metrica indotta sulla Dp-brana, mentre T_p rappresenta la tensione della Dp-brana.

Questo in realtà descrive solamente l'interazione dei campi della D-brana con lo spaziotempo $G_{\mu\nu}$ (e cioè con i gravitoni delle stringhe chiuse di background).

Se vogliamo generalizzare l'azione a bassa energia della D-brana tenendo conto anche dell'interazione con i campi $B_{\mu\nu}$ e Φ del background di stringa chiusa, allora si dimostra [2] che:

$$S_p = -T_p \int d^{p+1}\xi e^{-\Phi} \sqrt{-\det(G_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})}, \quad (2.6.4)$$

dove:

$$B_{ab}(\xi) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} B_{\mu\nu}(X(\xi)), \quad (2.6.5)$$

mentre F_{ab} è la field-strength associata al campo di gauge $A_a(\xi)$ sulla Dp-brana.

La (2.6.4) rappresenta l'azione a bassa energia della Dp-brana e viene chiamata *azione di Born-Infeld*.

Ora concentriamoci sulla tensione della Dp-brana.

Sebbene sia possibile calcolare T_p (vedere [2]), quello che ci interessa ai fini della string field theory è solamente il rapporto T_{p-1}/T_p .

Per ottenere il valore di questo rapporto si può usare la T-dualità.

In un background dilatónico costante la tensione di una Dp-brana è $T_p \exp(-\Phi)$ (questo risultato può essere ricavato [2] dalla (2.6.4)).

Consideriamo ora una Dp-brana nella quale le p direzioni tangenti alla D-brana sono state compattificate.

Quindi la Dp-brana è avvolta su un p-toro nello spaziotempo.

La sua massa è pari alla sua tensione moltiplicata per il volume del toro:

$$T_p e^{-\Phi} \prod_{i=1}^p (2\pi R_i). \quad (2.6.6)$$

Ora T-dualizziamo una delle dimensioni periodiche, X^p .

Questo non cambia la massa, dato che la teoria T-dualizzata è solamente una nuova descrizione dello stesso stato.

In termini del dilatone della teoria T-duale:

$$e^{\Phi'} \propto \alpha'^{1/2} e^{\Phi} \quad (2.6.7)$$

(questa relazione è ricavata in [2]), la massa (2.6.6) è:

$$2\pi \alpha'^{1/2} T_p e^{-\Phi'} \prod_{i=1}^{p-1} (2\pi R_i). \quad (2.6.8)$$

Nella teoria duale, comunque, essa è una D(p-1)-brana avvolta su un (p-1)-toro, così la sua massa è:

$$T_{p-1} e^{-\Phi'} \prod_{i=1}^{p-1} (2\pi R_i). \quad (2.6.9)$$

Uguagliando le masse (2.6.8) e (2.6.9) si ottiene che:

$$\frac{T_{p-1}}{T_p} = 2\pi \alpha'^{1/2}, \quad (2.6.10)$$

che iterata dà:

$$\frac{T_{p-n}}{T_p} = (2\pi\alpha'^{1/2})^n. \quad (2.6.11)$$

CAPITOLO 3: LA TEORIA DI CAMPO DI STRINGA (CUBIC STRING FIELD THEORY)

3.1 INTRODUZIONE

Nel paragrafo 2.4 abbiamo visto che la teoria delle stringhe bosoniche (formulata in prima quantizzazione) presenta un tachione nel suo spettro di massa.

La comparsa del tachione è un problema per la teoria, in quanto questa particella, avendo massa immaginaria, deve propagare ad una velocità maggiore di quella della luce.

Si può sospettare che la sua comparsa nello spettro della stringa sia dovuta al fatto che lo stato di vuoto della stringa bosonica (cioè il ground state, ovvero lo stato di minima energia, da non confondere con lo stato in cui non è presente alcuna stringa, perché la teoria delle stringhe è formulata in prima quantizzazione e non in seconda) sia stato identificato incorrettamente.

Cioè si può pensare che il vuoto della teoria delle stringhe bosoniche, presentando una massa al quadrato negativa, sia in realtà uno stato instabile, e che esista qualche altro vuoto stabile che non dia origine a tachioni.

Questa idea è stata suggerita dalla teoria di Higgs, che ora riportiamo [1] per rendere chiaro il concetto in questione.

Mettiamoci nell'ambito della teoria dei campi per una particella puntiforme, e consideriamo la seguente lagrangiana per un campo scalare ϕ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4, \quad (3.1.1)$$

dove μ e λ sono costanti reali.

Come si vede, questa lagrangiana è simmetrica sotto la trasformazione $\phi \rightarrow -\phi$

Il secondo termine appare come un termine di massa, ed il terzo come un termine d'interazione.

Però in realtà il secondo termine ha il segno sbagliato.

Infatti basta comparare questa lagrangiana con la lagrangiana di Klein-Gordon introdotta 1.2 nel paragrafo per vedere che se il secondo termine della (3.1.1) fosse un termine di massa, allora questa massa al quadrato sarebbe negativa (cioè la massa sarebbe immaginaria): abbiamo a che fare con un tachione, il che non ha senso.

Allora come possiamo interpretare questa lagrangiana?

Per rispondere a questa domanda, dobbiamo capire che il calcolo di Feynman per lo studio della teoria di campo è veramente una procedura perturbativa, nella quale si parte da un ground state (il "vuoto"), e si trattano i campi come fluttuazioni attorno a tale stato.

Per le lagrangiane considerate in precedenza, lo stato di vuoto, cioè la configurazione di campo di minima energia, era sempre stata la configurazione banale $\phi=0$.

Ma per la lagrangiana (3.1.1) $\phi=0$ non è il ground state.

Per determinare il *vero* ground state, cominciamo con lo scrivere la lagrangiana (3.1.1) come la differenza tra un termine “cinetico” ($\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)$) ed un termine di “potenziale” (proprio come si fa nell’ambito della meccanica classica newtoniana):

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}, \quad (3.1.2)$$

da cui si vede che nel nostro caso si ha che:

$$\mathcal{U}(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4. \quad (3.1.3)$$

Siccome l’energia del sistema è data da:

$$\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{U}, \quad (3.1.4)$$

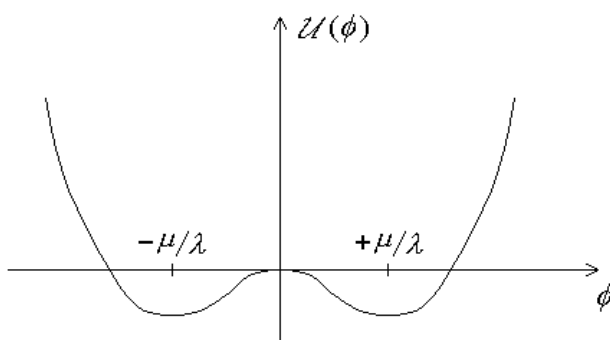
e siccome il ground state è un punto di minima energia, ne segue che dobbiamo determinare i punti di minimo di \mathcal{E} .

Però i punti di minimo sono stazionari, e quindi ne segue che in tali punti $\mathcal{T}=0$.

Quindi, per determinare il ground state, basta minimizzare \mathcal{U} , il che fornisce:

$$\phi = \pm \frac{\mu}{\lambda}, \quad (3.1.5)$$

come mostrato dalla seguente figura:



Per questa lagrangiana, il calcolo di Feynman deve essere formulato in termini delle deviazioni da uno o dall’altro di questi due ground states.

Questo ci suggerisce di introdurre una *nuova* variabile di campo, η , definita da:

$$\eta \equiv \phi \pm \frac{\mu}{\lambda}. \quad (3.1.6)$$

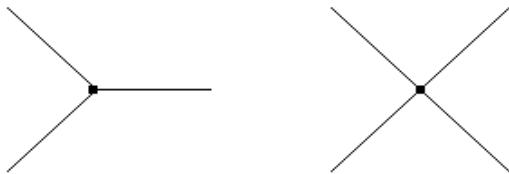
In termini di η , la lagrangiana (3.1.1) diventa:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 \pm \mu \lambda \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda^2 \eta^4 + \frac{1}{4} (\mu^2 / \lambda)^2. \quad (3.1.7)$$

La seconda quantità è ora un termine di massa con il *giusto* segno, e si scopre (comparando con la lagrangiana di Klein-Gordon) che la massa della particella è:

$$m = \sqrt{2} \mu \hbar / c. \quad (3.1.8)$$

Invece, il terzo ed il quarto termine rappresentano accoppiamenti della forma:



(l'ultimo termine della (3.1.7) è costante, e quindi non significa nulla).

Sottolineiamo il fatto che le due lagrangiane (3.1.1) e (3.1.7) rappresentano esattamente lo stesso sistema fisico; tutto quello che abbiamo fatto è stato cambiare la *notazione* (3.1.6).

Ma la prima versione non è adatta per effettuare il calcolo di Feynman (tecnicamente, una serie perturbativa in ϕ non converge, perché essa ha un'espansione attorno ad un punto instabile); solamente nella seconda formulazione si può determinare la massa ed i fattori di vertice.

Questa osservazione viene applicata nel Modello Standard per dare massa ai mediatori della forza nucleare debole, attraverso la cosiddetta *rottura spontanea di simmetria* (infatti, per poter interpretare la lagrangiana (3.1.1), abbiamo visto che si deve usare la trasformazione (3.1.6), cioè scegliere uno dei due punti di minimo del potenziale. Dopo la trasformazione (3.1.6) la lagrangiana è ancora invariante sotto $\phi \rightarrow -\phi$, anche se non lo si vede facilmente, ma lo stato di vuoto invece no. È questo che si intende per rottura di simmetria).

Quindi, nell'ambito del Modello Standard, è indispensabile che il potenziale sia simmetrico, ma questa è un'idea in più, che non serve nell'ambito della teoria di campo di stringa.

Infatti, nell'ambito della teoria di campo di stringa la sola cosa importante è che il potenziale del tachione abbia un punto di massimo ed un punto di minimo, in modo da poter applicare il concetto delle due lagrangiane appena spiegato.

Nell'ambito della teoria delle stringhe bosoniche si vuole quindi calcolare il potenziale del tachione, verificare che questo potenziale abbia un punto di massimo ed uno di minimo, e che la teoria delle stringhe bosoniche sia definita sul punto di massimo.

Se così fosse, il punto di massimo sarebbe un vuoto on-shell, mentre il punto di minimo sarebbe off-shell.

Bisogna quindi riformulare la teoria delle stringhe bosoniche in modo da poter analizzare anche i punti off-shell.

Siccome, per quanto visto nel paragrafo 1.3, un metodo noto per studiare i fenomeni off-shell è la teoria di campo, si è pensato di riformulare la teoria delle stringhe bosoniche attraverso appunto la teoria di campo.

La teoria risultante è nota pertanto come *teoria di campo di stringa* (string field theory).

In questo ambito sono state formulate tre congetture da Ashoke Sen [6], che ora riportiamo per il caso della stringa bosonica:

- 1) Il potenziale effettivo del tachione $V(T)$ ha un minimo locale in qualche punto $T=T_0$, e in questo punto di minimo la tensione \mathcal{T}_p della D-brana originale è esattamente cancellata dal valore negativo $V(T_0)$ del potenziale:

$$V(T_0) + \mathcal{T}_p = 0. \quad (3.1.9)$$

- 2) Siccome la densità di energia totale si annulla a $T=T_0$, è naturale identificare la configurazione $T=T_0$ come il vuoto senza alcuna D-brana. Questo implica che non ci sono stati fisici perturbativi di stringa aperta attorno al minimo del potenziale, siccome gli stati di stringa aperta vivono solamente sulle D-brane.
- 3) Sebbene non ci siano stati fisici perturbativi attorno al minimo del potenziale, le equazioni del moto ricavate dall'azione effettiva del tachione devono avere soluzioni *a bernoccolo* (lump solutions) classiche indipendenti dal tempo e non banali di varie codimensioni. Una soluzione a bernoccolo di codimensione q su una D_p -brana, per la quale T dipende dal q delle coordinate spaziali e tende a T_0 quando ciascuna di queste coordinate q tende all'infinito, rappresenta una $D-(p-q)$ -brana della teoria di stringa bosonica, a sua volta instabile nelle $(p-q)$ dimensioni rimanenti.

Il significato di queste congetture è già stato spiegato nell'introduzione generale.

Si può essere interessati anche alle soluzioni dipendenti dal tempo, ed in particolare a cosa succede se spostiamo il tachione dal punto di massimo del suo potenziale, permettendogli di rotolare verso il suo minimo.

Questo processo è detto *condensazione tachionica* e le soluzioni che ne descrivono l'evoluzione temporale sono dette *soluzioni di rolling*.

Qui ci dedicheremo a dimostrare la prima e la terza congettura di Sen e di ricavare una particolare soluzione di rolling, nell'ambito della background independent open string field theory, esposta al capitolo 4.

Invece la seconda congettura di Sen viene studiata nella cosiddetta *vacuum string field theory*, un'area della fisica così vasta da non permetterci di analizzarla in questa tesi.

Nell'ambito della background independent open string field theory ci occuperemo solamente di dimostrare che nel punto di minimo del potenziale non esiste lo stato tachionico, il che dimostra solo in parte la seconda congettura.

La prima e la terza congettura di Sen verranno analizzate brevemente anche nel caso della cubic string field theory, esposta al paragrafo 3.2.

Tutto questo verrà trattato nel caso della teoria delle stringhe bosoniche.

Nell'introduzione generale abbiamo detto che il problema del tachione esiste anche nella teoria delle stringhe supersimmetriche.

Dato che non ci occupiamo di questo argomento, spiegheremo brevemente in che modo il problema del tachione emerge nell'ambito della teoria supersimmetrica, dedicando questa breve spiegazione ai lettori che conoscono già la teoria supersimmetrica in prima quantizzazione.

La spiegazione consiste semplicemente nell'osservare che lo spettro della stringa supersimmetrica aperta si divide in quattro settori: NS+, NS-, R+, R-.

NS rappresenta il cosiddetto *settore di Neveu-Schwarz*, mentre R il cosiddetto *settore di Ramond*.

Invece \pm rappresenta il segno del cosiddetto *numero fermionico di world-sheet*.

Tra questi quattro settori ne esiste uno che contiene un tachione di massa al quadrato $-1/(2\alpha')$.

Questo settore è quello NS-.

Pertanto, secondo la teoria di campo, la comparsa di questo tachione deve essere interpretata come una incorretta identificazione dello stato di vuoto per questo settore della stringa supersimmetrica, il che richiede la riformulazione off-shell della teoria per poter risolvere questo problema del settore NS-.

3.2 CUBIC STRING FIELD THEORY

Come abbiamo detto nel paragrafo 3.1, tra i due metodi formulati per risolvere il problema del tachione, in questo lavoro ci dedicheremo solamente a quello della teoria di campo di stringa (e quindi questo sottintende che non analizzeremo il modello della stringa supersimmetrica e tanto meno la teoria di campo di stringa supersimmetrica: ci dedicheremo solamente al caso della teoria di campo di stringa bosonica).

Per comprendere come una tale teoria possa essere definita, compariamo innanzitutto l'approccio che abbiamo utilizzato nel capitolo 2 per formulare la teoria delle stringhe bosoniche in prima quantizzazione, con il metodo del capitolo 1 con cui la teoria di campo quantistica è formulata per le particelle puntiformi.

Abbiamo già detto, nel capitolo 2, che la teoria delle stringhe in essa esposta si dice essere formulata in *prima quantizzazione* in quanto essa è stata quantizzata attraverso un path integral di world-sheet.

Invece, nel capitolo 1, abbiamo detto che la teoria dei campi per le particelle puntiformi si dice essere formulata in *seconda quantizzazione* perché essa è stata quantizzata attraverso un path integral sui campi di spazio-tempo.

Nel paragrafo 1.4, abbiamo anche detto che la teoria dei campi potrebbe anche essere formulata in prima quantizzazione, attraverso un path integral di world-line ed introducendo espliciti vertici d'interazione.

Quello invece di cui si occupa la teoria di campo di stringa, è formulare la teoria delle stringhe in seconda quantizzazione, cioè attraverso un path integral su un set infinito di campi di spazio-tempo.

Quello che bisogna domandarsi innanzitutto è se una tale formulazione della teoria delle stringhe possa essere realizzata e se esista un qualche principio, con la funzione di estendere l'invarianza di gauge e la generica invarianza di coordinate, che determini la forma della teoria.

Per rispondere a queste domande, cominciamo con la congettura di prendere il funzionale di stringa $\Phi[X]$ ed eleviamola ad un operatore di campo, od equivalentemente ad una variabile d'integrazione di path integral: è la cosiddetta seconda quantizzazione.

Ora, $\Phi[X]$ dipende dalla curva $X^\mu(\sigma)$ disegnata dalla stringa nello spazio-tempo, e rozzamente parlando crea o distrugge una stringa in questa configurazione.

Comunque, dobbiamo essere più precisi.

Per esempio, dovremmo richiedere che Φ sia invariante sotto riparametrizzazione della curva $X^\mu(\sigma)$?

Inoltre dovrebbe anche dipendere dalla metrica di Polyakov g_{ab} ?

Le cose sembrano funzionare molto meglio se si incomincia con la forma BRST-invariante della teoria, includendo i ghosts di Faddeev-Popov, e poi effettuando la seconda quantizzazione.

Dalle relazioni di commutazione, b e c sono coniugate tra di loro (così come lo sono \tilde{b} e \tilde{c}), così se per esempio trattiamo c e \tilde{c} come coordinate, allora il funzionale d'onda è $\Phi[X, c, \tilde{c}]$.

Quindi abbiamo un path integral che corre su tutti questi funzionali:

$$\int [d\Phi] e^{iS[\Phi]}. \quad (3.2.1)$$

Consideriamo dapprima il caso della stringa aperta, descrivendo un particolare approccio (il primo a livello storico), formulato da Edward Witten [2][9] e definito *cubic string field theory* (la giustificazione dell'aggettivo cubic sarà chiara più avanti).

Quale principio di simmetria determina la forma dell'azione?

Dallo studio degli operatori di vertice della stringa e degli stati nulli, possiamo congetturare la simmetria:

$$\delta |\Phi\rangle = Q_B |\Lambda\rangle \quad (3.2.2)$$

per qualsiasi funzionale Λ .

Esiste un'azione estremamente semplice con questa invarianza:

$$S_0 = \frac{1}{2} \langle \Phi | Q_B | \Phi \rangle. \quad (3.2.3)$$

L'equazione del moto che si ottiene annullando la variazione di questa azione determinata da una variazione di Φ è:

$$Q_B |\Phi\rangle = 0. \quad (3.2.4)$$

Un modo di vedere che questo è ragionevole è estendendo il campo di stringa Φ in termini di un infinito numero di campi ordinari, uno per ciascuno stato interno della stringa.

Supponiamo che $\Phi_i[X, c, \tilde{c}]$ sia un set completo di funzioni d'onda per i modo interni, tutti tranne il centro di massa x^μ .

Allo uno stato generico può essere espanso nel seguente modo:

$$\Phi[X, c, \tilde{c}] = \sum_i \phi_i(x) \Phi_i[X', c, \tilde{c}], \quad (3.2.5)$$

dove i coefficienti dell'espansione sono funzioni delle variabili rimanenti x^μ .

Grazie a questa espansione il path integral della stringa diventa un prodotto infinito di path integrals sulle funzioni componenti:

$$\int [d\Phi] \rightarrow \prod_i \int [d\Phi_i]. \quad (3.2.6)$$

Come al solito, possiamo partire con il funzionale di vuoto Φ_0 e costruire i rimanenti stati con gli operatori di creazione.

Per esempio, considerando tutti gli stati ad i primi due livelli:

$$|\Phi\rangle = \left[\phi(x) + A_\mu(x)\alpha_{-1}^\mu + B(x)b_{-1} + C(x)c_{-1} + \phi'(x)c_0 + A'_\mu(x)\alpha_{-1}^\mu c_0 + B'(x)b_{-1}c_0 + C'(x)c_{-1}c_0 + \dots \right] |\Phi_0\rangle.$$

(3.2.7)

Qui, ϕ è il campo del tachione ed A_μ è il campo di gauge, mentre B e C sono i campi di ghost di Faddeev-Popov associati alla simmetria di gauge di spazio-tempo.

I campi con il segno ' possono tutti essere tolti con il gauge oppure sono campi ausiliari (cioè soddisfano equazioni algebriche anziché differenziali e quindi possono essere eliminati).

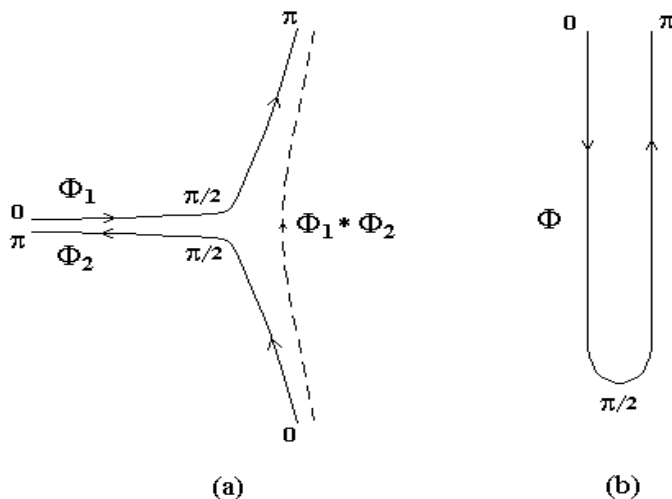
È possibile controllare che la simmetria (3.2.2) include l'ordinaria trasformazione di gauge su A_μ (e cioè la trasformazione $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$), mentre l'azione è della forma di Klein-Gordon per ϕ e della forma di Maxwell per A_μ .

Pertanto il formalismo BRST del campo di stringa fornisce una generalizzazione molto compatta dell'invarianza di gauge di spazio-tempo.

Anche l'interazione ha abbastanza successo.

Definiamo un'operazione di moltiplicazione $\Phi_1 * \Phi_2$ sui campi di stringa attraverso l'integrale funzionale che forma la sovrapposizione della metà destra di Φ_1 con la metà sinistra di Φ_2 , e definiamo inoltre un'operazione \int , la quale fornisce la sovrapposizione delle metà destra e sinistra del singolo funzionale d'onda di stringa.

Queste due operazioni sono mostrate nelle parti (a) e (b) rispettivamente della seguente figura:



Per realizzare una teoria d'interazione, aggiungiamo un termine non-lineare alla trasformazione di gauge (3.2.2):

$$\delta\Phi = Q_B \Lambda + g\Phi * \Lambda - g\Lambda * \Phi. \quad (3.2.8)$$

Il prodotto $*$ è associativo, ed è possibile mostrare che Q_B agisce come una derivata, cioè che soddisfa la regola di Leibniz:

$$Q_B(\Phi_1 * \Phi_2) = (Q_B \Phi_1) * \Phi_2 + \Phi_1 * (Q_B \Phi_2). \quad (3.2.9)$$

Da questo segue che la simmetria (3.2.8) si chiude. Utilizzando la proprietà ciclica:

$$\int \Phi_1 * \Phi_2 = \int \Phi_2 * \Phi_1, \quad (3.2.10)$$

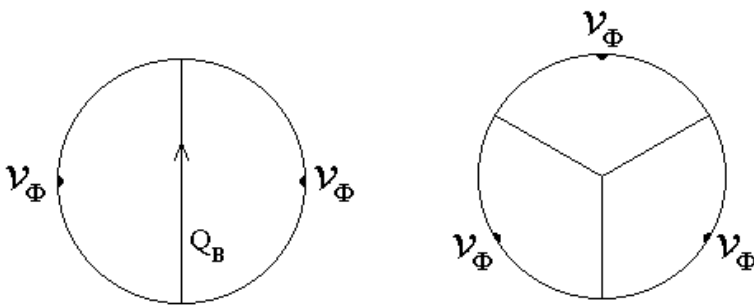
è possibile scrivere la seguente azione invariante:

$$S = \frac{1}{2} \int \Phi * Q_B \Phi + \frac{2g}{3} \int \Phi * \Phi * \Phi. \quad (3.2.11)$$

Questa può anche essere scritta in modo utile in termini della teoria di campo conforme, sostituendo Φ con un mezzo disco con corrispondente operatore di vertice \mathcal{V}_Φ :

$$S = \frac{1}{2} \langle \mathcal{V}_\Phi Q_B \mathcal{V}_\Phi \rangle_{D_2} + \frac{2g}{3} \langle \mathcal{V}_\Phi \mathcal{V}_\Phi \mathcal{V}_\Phi \rangle_{D_2}. \quad (3.2.12)$$

Le posizioni degli operatori di vertice non sono state indicate esplicitamente nell'equazione (3.2.12) ma sono mostrate nella seguente figura:



Una mappa $z^{2/3}$ è utilizzata per fissare i tre operatori di vertice nel disco.

Evidenziamo una strana caratteristica di questa teoria di campo: si può osservare [2] che il path integral di campo di stringa aperta (3.2.1) genera le ampiezze di una teoria di stringa aperta+chiusa.

Per una teoria con solamente stringhe chiuse si usa l'azione:

$$S'_0 = \frac{1}{2} \langle \Phi | (c_0 - \tilde{c}_0) Q_B | \Phi \rangle, \quad (3.2.13)$$

che è invariante sotto $\delta|\Phi\rangle = Q_B|\Lambda\rangle$.

Però andando verso la teoria d'interazione non esiste un prodotto associativo analogo a *.

Occorre aggiungere vertici più elevati $\mathcal{V}_{g,n}$ con più potenze del campo ed anche con manici interni.

L'azione risultante, come l'azione di stringa aperta, può essere ottenuta da un principio di simmetria utilizzando quello che è noto come il *formalismo di Batalin-Vilkovisky* (spiegato nell'appendice A.4).

Comunque abbiamo già detto che nell'ambito di questa tesi ci interesseremo solamente delle stringhe aperte.

La cubic string field theory non permette di ottenere dei risultati esatti, ma solo dei risultati con approssimazione buona a piacere attraverso il cosiddetto metodo di troncamento dei livelli [9].

Per spiegare questo metodo, espandiamo, come nella (3.2.7), il campo di stringa nel seguente modo, utilizzando la base dello spazio di Fock e la relazione $|\Phi_0\rangle = c_1|0\rangle$ (dove qui con $|0\rangle$ intendiamo lo stato di vuoto $SL(2, \mathbb{R})$ invariante):

$$|\Phi\rangle = \int d^d k \left(\phi + A_\mu \alpha_{-1}^\mu + i\alpha b_{-1} c_0 + \frac{i}{\sqrt{2}} B_\mu \alpha_{-2}^\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} B_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \alpha_{-1}^\nu + \beta_0 b_{-2} c_0 + \beta_1 b_{-1} c_{-1} + ik_\mu \alpha_{-1}^\mu b_{-1} c_0 + \dots \right) c_1 |0; k\rangle.$$

(3.2.14)

Siccome L_0^{tot} è dato da:

$$L_0^{\text{tot}} = \alpha' p^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{\mu n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \circ c_{-n} b_{n \circ} - 1 \quad (3.2.15)$$

(vedere le (2.3.12) e (2.3.42)), ciascun termine in $|\Phi\rangle$ è un autostato di L_0^{tot} .

In generale, un livello di un autostato di L_0^{tot} è definito come la somma dei numeri di livello n degli operatori di creazione che agiscono su $c_1|k\rangle$, cioè la somma del secondo e del terzo termine della (3.2.15).

Questa definizione è adattata in modo tale che il tachione di momento nullo, cioè $c_1|0\rangle$, sia al livello 0.

Ed il livello di un campo componente (ϕ, A_μ, \dots) è definito come il livello dello stato ad esso associato (in alcuni casi questa definizione è modificata per includere il contributo derivante dal termine dipendente dal momento, come spiegato al capitolo 4 di [9]).

Ora che abbiamo definito il numero di livello per l'espansione del campo di stringa, definiamo il livello di ciascun termine nell'azione come la somma dei livelli dei campi coinvolti.

Per esempio, se gli stati $|\Phi_1\rangle, |\Phi_2\rangle, |\Phi_3\rangle$ hanno livelli n_1, n_2, n_3 rispettivamente, assegniamo il livello $n_1+n_2+n_3$ al termine d'interazione $\langle \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \rangle$.

Allora troncamento al livello N significa che teniamo solamente quei termini con livello uguale o minore di N .

Quando diciamo ‘troncamento al livello (M, N)’, questo significa che il campo di stringa include i termini con livello $\leq M$ mentre l’azione include termini con livello $\leq N$.

Il troncamento dei livelli è un mezzo di approssimazione che è necessario semplicemente perché non possiamo trattare un infinito numero di termini.

Ma non è chiaro se questo è un buon schema di approssimazione.

Per quanto riguarda questo punto, sono dati alcuni argomenti a sostegno della validità della approssimazione: in [10] viene detto che i termini del livello n nell’azione contengono il fattore $(4/3\sqrt{3})^n \simeq (0.77)^n$, cosicché essi decrescono esponenzialmente all’aumentare di n . Invece, in [11], sono studiate numericamente delle teorie di campo effettive del tachione e del campo di gauge. Fino al livello 20 le approssimazioni sembrano essere ben convergenti, e non obbediscono né ad una legge esponenziale né ad una legge di potenza nel decadimento. Comunque, siccome non ci sono piccoli parametri che convalidino l’espansione perturbativa (il parametro $4/3\sqrt{3}$ sembra non essere abbastanza piccolo per render conto della rapida convergenza esibita successivamente), sarebbe molto interessante se potessimo comprendere pienamente la proprietà di convergenza in un modo puramente teorico, e non numerico.

Abbiamo detto precedentemente che per lo studio della condensazione tachionica serve conoscere il potenziale del tachione, definito come l’azione a $\phi(x)=\text{costante}$ (dove $\phi(x)$ rappresenta il campo del tachione), cioè ad impulso nullo.

Vediamo ora più in dettaglio questa definizione.

Un campo di stringa è un elemento dello spazio di Hilbert \mathcal{H}^1 di ghost number 1.

Decomponiamo \mathcal{H}^1 in due parti, $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^1_1 \otimes \mathcal{H}^1_2$.

\mathcal{H}^1_1 consiste di stati ottenuti agendo con gli oscillatori di ghost b_n, c_n e con i generatori di Virasoro L_n^m della materia sul vuoto $SL(2, \mathbb{R})$ -invariante, cioè su $|0\rangle$.

È da notare che \mathcal{H}^1_1 contiene lo stato del tachione a momento nullo, cioè lo stato $c_1|0\rangle$.

Invece \mathcal{H}^1_2 include tutti gli altri stati di \mathcal{H}^1 , cioè stati con momento non-nullo k lungo la Dp -brana e stati ottenuti dall’azione di b_n, c_n, L_n^m sugli stati *primari* non-banali di peso >0 .

Ora denotiamo con T il campo di stringa Φ troncato ad \mathcal{H}^1_1 .

Siccome i campi in \mathcal{H}^1_1 hanno momento nullo e quindi sono indipendenti dalle coordinate sul world-volume della Dp -brana, l’integrazione sulle x dà il fattore di volume $(p+1)$ -dimensionale, cioè V_{p+1} .

Così l’azione è scritta come:

$$\tilde{S}(T) = V_{p+1} \tilde{\mathcal{L}}(T) = -V_{p+1} U(T), \quad (3.2.16)$$

dove abbiamo definito il potenziale $U(T)$ del tachione come l’opposto (di segno) della lagrangiana. Si definisce poi la seguente ‘funzione universale’:

$$f(T) \equiv \frac{U(T)}{\tau_p}. \quad (3.2.17)$$

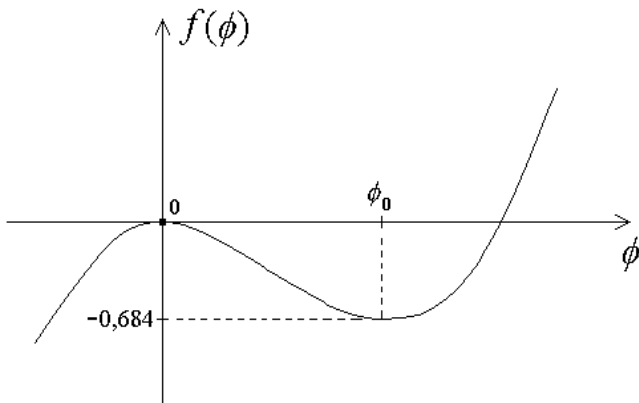
Quindi, in termini della funzione $f(T)$, se supponiamo che essa abbia un punto di minimo T_0 , la prima congettura di Sen sostiene che debba essere:

$$f(T = T_0) = -1. \quad (3.2.18)$$

Si dimostra [9] che la cubic string field theory troncata al livello (0,0), cioè approssimata considerando solamente lo stato del tachione a momento nullo, fornisce il seguente potenziale del tachione:

$$f(\phi) = 2\pi^2 \alpha'^3 \left(-\frac{1}{2\alpha'} \phi^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} \right)^3 \phi^3 \right). \quad (3.2.19)$$

Di seguito riportiamo il grafico di questa funzione:



Imponendo $\partial f(\phi)/\partial \phi|_{\phi_0} = 0$ per trovare il punto di minimo ϕ_0 di $f(\phi)$, si ottiene che:

$$\phi_0 = \left(\frac{4}{3\sqrt{3}} \right)^3 \frac{1}{\alpha'} \approx \frac{0,456}{\alpha'} \quad \text{ed} \quad f(\phi_0) \approx -0,684. \quad (3.2.20)$$

Sebbene abbiamo considerato solamente lo stato del tachione nel vasto spazio di Hilbert \mathcal{H}^1_1 , il valore di minimo (3.2.20) tiene conto solo del 68,4 % del valore (3.2.18) congetturato. Questo è dovuto al fatto che abbiamo troncato la teoria al livello più basso. Includendo invece i campi dei livelli più elevati si osserva che in effetti il valore del minimo del potenziale sembra tendere al valore congetturato.

I risultati ottenuti sono mostrati nella seguente tabella:

LIVELLO	$f(T_0)$
(0,0)	-0,684
(2,4)	-0,949
(2,6)	-0,959
(4,8)	-0,986
(4,12)	-0,988
(6,12)	-0,99514
(6,18)	-0,99518
(8,16)	-0,99777
(8,20)	-0,99793
(10,20)	-0,99912

Descriviamo ora brevemente la fisica del nuovo vuoto, cioè del punto di minimo T_0 del potenziale del tachione.

L'usuale vuoto di stringa aperta, cioè il punto di massimo del potenziale, con una o più Dp-brane, dove tutti i campi, ad eccezione di quelli che descrivono il moto collettivo delle D-brane, hanno valori di aspettazione nulli, è detto 'vuoto perturbativo'.

In opposizione, il nuovo vuoto trovato, dove vari campi sviluppano valori di aspettazione non-nulli, è detto 'vuoto non-perturbativo', per ragioni discusse di seguito, oppure 'vuoto di stringa chiusa' perché si crede che in questo nuovo vuoto il contributo di energia negativa dovuto al potenziale del tachione associato con il rotolamento (rolling) del campo del tachione dal punto di massimo al punto di minimo del potenziale (e cioè la condensazione tachionica) cancelli esattamente la densità di energia positiva (cioè la tensione) della D-brana, il che comporta la formazione di un vuoto vero senza alcuna D-brana o stringa aperta.

Per capire perché il nuovo vuoto trovato è detto 'vuoto non-perturbativo', cominciamo con l'osservare che, riscaldando il campo di stringa Φ a $g_0\Phi$, il punto di minimo della (3.2.19) diventa $\phi_0 \approx 0,456/(\alpha' g_0)$, il che suggerisce appunto la natura non-perturbativa di questo vuoto (dato che g_0 è a denominatore).

Inoltre, sviluppando il potenziale effettivo in serie di potenze:

$$f_{eff}(\phi) = 2\pi^2 \alpha'^3 \sum_{n=2}^{+\infty} c_n k^{n-2} \phi^n = 2\pi^2 \alpha'^3 \left(-\frac{1}{2\alpha'} \phi^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} \right)^3 \phi^3 + \dots \right) \quad (3.2.21)$$

del potenziale effettivo attorno al vuoto perturbativo $\phi=0$ si scopre [12] numericamente che ha un raggio di convergenza r_c che decresce monotonicamente all'aumentare del livello di troncamento, e sembra tendere al valore finito:

$$r_c \approx \frac{0,125}{\alpha'}. \quad (3.2.22)$$

nel limite della teoria esatta (cioè nel limite della teoria di campo di stringa completa, cioè senza approssimazioni di troncamento dei livelli).

Quindi l'espansione perturbativa (3.2.21) del potenziale effettivo è valida solo dentro il raggio di convergenza (3.2.22).

Di conseguenza concludiamo che il vuoto di stringa chiusa è proprio non-perturbativo, poiché il valore di aspettazione del tachione su quel vuoto è $\phi_0 \simeq 0,54/\alpha'^{13}$ al livello (2,6), che è ben al di fuori del raggio di convergenza.

Finora abbiamo analizzato solamente la struttura statica del potenziale effettivo del tachione.

Ora invece vogliamo esaminare le fluttuazioni attorno al vuoto non-perturbativo.

Quindi in tale ambito quello che si vuole fare è determinare le eccitazioni fisiche.

Se la congettura che le D-brane spariscono dopo la condensazione tachionica è vera, non dovrebbero esserci eccitazioni fisiche di gradi di libertà di stringa aperta nel vuoto non-perturbativo.

Analizziamo il caso dell'azione troncata al livello (1,2), che si dimostra [9] essere:

$$S_{(1,2)} = \frac{1}{g_0^2} \int d^d x \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2\alpha'} \phi^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} \right)^3 \tilde{\phi}^3 - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \frac{3\sqrt{3}}{4} \tilde{\phi} \tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu + \right. \\ \left. - \frac{3\sqrt{3}}{8} \alpha' (\partial_\mu \partial_\nu \tilde{\phi} \tilde{A}^\mu \tilde{A}^\nu + \tilde{\phi} \partial_\mu \tilde{A}^\nu \partial_\nu \tilde{A}^\mu - 2 \partial_\mu \tilde{\phi} \partial_\nu \tilde{A}^\mu \tilde{A}^\nu) \right), \quad (3.2.23)$$

dove:

$$\tilde{\phi} \equiv \exp \left(-\alpha' \ln \frac{4}{3\sqrt{3}} \partial_\mu \partial^\mu \right) \phi(x). \quad (3.2.24)$$

Nel caso di momento nullo questa azione diventa:

$$S_{(1,2)} = -\frac{V_d}{g_0^2} U(\phi, A_\mu); \quad (3.2.25) \\ U(\phi, A_\mu) = -\frac{1}{2\alpha'} \phi^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} \right)^3 \phi^3 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \phi A_\mu A^\mu,$$

dove $V_d = \int d^d x = (2\pi)^d \delta^d(0)$ è il fattore di volume di spaziotempo (inoltre abbiamo utilizzato il fatto che $\tilde{\phi} = \phi$ nel caso di momento nullo).

In questo livello di approssimazione, ϕ ha il valore di aspettazione di vuoto $\phi_0 \simeq 0,456/\alpha'$ al vuoto non-perturbativo.

Shiftando $\phi = \phi_0 + \phi'$ (dove ϕ' rappresenta le piccole fluttuazioni attorno al vuoto non-perturbativo che vogliamo studiare), il potenziale U diventa:

$$U(\phi', A_\mu) = -\frac{2^{11}}{3^{10} \alpha'^3} + \frac{1}{2\alpha'} \phi'^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} \right)^3 \phi'^3 + \frac{16}{27\alpha'} A_\mu A^\mu + \frac{3\sqrt{3}}{4} \phi' A_\mu A^\mu. \quad (3.2.26)$$

Il primo termine è una costante che determina la profondità del potenziale.

Invece, il secondo, il terzo ed il quinto termine sono gli eredi dei termini nella (3.2.25), ma bisogna notare che il segno del termine ϕ'^2 è stato rovesciato: il campo del tachione sulla D-brana originale (cioè nel vuoto perturbativo) non è più un tachione attorno al vuoto non-perturbativo (il che è analogo all'esempio esposto in precedenza sul potenziale utilizzato nella teoria della rottura spontanea di simmetria).

Questo in parte mostra la stabilità del vuoto non-perturbativo.

Infine, il quarto termine della (3.2.26) appare come un termine di massa per il campo vettoriale A_μ : durante il processo della condensazione tachionica, la massa del campo vettoriale (originariamente senza massa) è stata generata spontaneamente!

Il valore della massa al quadrato è:

$$\frac{m^2}{2} = \frac{16}{27\alpha'} \approx \frac{0,59}{\alpha'}. \quad (3.2.27)$$

Ora concentriamoci sulle forme quadratiche nell'azione i cui zeri rappresentano le masse al quadrato degli stati.

Se abbiamo un'espressione di forma chiusa Φ_0 per il vuoto non-perturbativo, possiamo esaminare le piccole fluttuazioni attorno ad esso shiftando il campo di stringa come $\Phi = \Phi_0 + \Phi'$.

Analizziamo il caso dell'azione troncata al livello (1,2) vista prima.

La sua parte quadratica (cioè quella che dipende dai prodotti di due campi dello stesso tipo) può essere ricavata dalla (3.2.23) e si dimostra essere:

$$S_{(1,2)}^{quad} = \frac{1}{g_0^2} \int d^d x \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi' + \frac{1}{2\alpha'} \phi'^2 - \frac{1}{\alpha'} \tilde{\phi}'^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \frac{2^4}{3^3 \alpha'} \tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu - \frac{2^3}{3^3} \partial_\mu \tilde{A}_\nu \partial^\nu \tilde{A}^\mu \right).$$

(3.2.28)

D'ora in avanti sottintenderemo l'apice ' su ϕ' , intendendo che ϕ rappresenti una fluttuazione attorno al vuoto non-perturbativo.

Gli zeri della forma quadratica per ϕ nello spazio dei momenti sono determinati da:

$$-\frac{1}{2} p_\mu p^\mu + \frac{1}{2\alpha'} - \frac{1}{\alpha'} \exp\left(2\alpha' \ln \frac{4}{3\sqrt{3}} p_\mu p^\mu\right) = 0. \quad (3.2.29)$$

Settando $p_\mu p^\mu = -m^2$, si ottiene che il lato sinistro della (3.2.29) è definito negativo per tutti i valori reali di m^2 .

Quindi abbiamo trovato che il propagatore del campo ϕ non ha alcun polo fisico al vuoto non-perturbativo!

Quindi lo stato associato a ϕ è stato rimosso dallo spettro fisico al vuoto non-perturbativo.

In modo simile, le forme quadratiche per A_μ sono:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}p^2 - \frac{2^4}{3^3\alpha'} \exp\left(2\alpha' \ln \frac{4}{3\sqrt{3}} p^p\right) &= 0 \quad (A_\mu^T), \\
-\frac{1}{2}p^2 - \left(\frac{2^4}{3^3\alpha'} + \frac{2^3 p^2}{3^3}\right) \exp\left(2\alpha' \ln \frac{4}{3\sqrt{3}} p^p\right) &= 0 \quad (A^L),
\end{aligned}
\tag{3.2.30}$$

dove:

$$A_\mu^T = A_\mu - \frac{\partial_\mu \partial^\nu A_\nu}{\partial^2}, \quad A_\mu^L = \frac{\partial_\mu \partial^\nu A_\nu}{\partial^2}, \quad A^L = \frac{\partial^\mu A_\mu}{\sqrt{|-\partial^2|}}
\tag{3.2.31}$$

cosicché $A_\mu = A_\mu^T + A_\mu^L$, $\partial_\mu A^{T\mu} = 0$, $\partial_\mu A^{L\mu} = \partial_\mu A^\mu$.

Siccome per A_μ^T non ci sono poli reali, il campo vettoriale trasverso non è fisico, cioè, così come lo stato associato a ϕ , anche lo stato associato ad A_μ^T è stato rimosso dallo spettro fisico al vuoto non-perturbativo.

Invece il campo scalare A^L ha un polo ad $m^2 = -p^2 = 1/\alpha'$.

Sebbene abbiamo trovato un polo per il propagatore di A^L , che non dovrebbe proprio esserci, questo non significa direttamente la formazione di uno stato fisico perché esso potrebbe essere nullo.

In ogni caso abbiamo visto che gli stati associati a ϕ ed A_μ^T sono stati rimossi dallo spettro fisico al vuoto non-perturbativo.

Così, il numero degli stati fisici al vuoto non-perturbativo è chiaramente più piccolo di quello al vuoto perturbativo, sebbene questo non provi la congettura che non ci siano del tutto eccitazioni fisiche al vuoto non-perturbativo.

In [9] viene trattato poi anche il caso dell'azione troncata al livello (2,4).

Finora abbiamo trattato lo spettro dei campi più bassi al vuoto non-perturbativo.

Sebbene non possiamo mostrare che non ci siano del tutto eccitazioni fisiche al vuoto non-perturbativo, abbiamo visto che il numero degli stati fisici cala in modo considerevole se comparato con il numero degli stati fisici al vuoto perturbativo.

Ed abbiamo visto che il fattore esponenziale $\exp(\alpha' \ln 4 / (3\sqrt{3}) p^2)$, che viene originato dalla struttura del vertice della cubic string field theory, ha un ruolo significativo nella determinazione dello spettro al vuoto non-perturbativo.

CAPITOLO 4: BACKGROUND INDEPENDENT OPEN STRING FIELD THEORY

Prima di analizzare l'argomento vero e proprio di questa tesi, cioè la background independent open string field theory, viene riportata una sezione d'introduzione, che ha lo scopo di spiegare il concetto della indipendenza dal background (sfondo), che è la motivazione essenziale che ha portato alla formulazione di questa teoria di campo di stringa.

4.1 INTRODUZIONE

Vediamo il concetto e l'origine storica della indipendenza dal background.

Nel 1912, mentre stava elaborando la teoria della relatività generale, Einstein comprese qualcosa che egli trovò allarmante.

La relatività generale nacque solamente quando questo problema venne finalmente risolto, nel 1915/16.

Di seguito viene fornita una semplice spiegazione di questo problema che fa uso solamente delle nozioni di base della relatività generale.

Cominciamo con una osservazione matematica diretta.

Scriviamo due volte l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico (per esempio):

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + f(x) = 0 \quad (4.1.1a)$$

$$\frac{d^2 g(y)}{dy^2} + g(y) = 0 \quad (4.1.1b)$$

Nell'equazione (4.1.1a) la variabile indipendente è x , mentre nell'equazione (4.1.1b) è y .

Una volta che abbiamo scoperto che una soluzione dell'equazione (4.1.1a) è $f(x)=\cos x$, immediatamente sappiamo che $g(y)=\cos y$ risolve l'equazione (4.1.1b).

Questa osservazione, combinata con la covarianza generale, ha profonde implicazioni nella relatività generale.

Consideriamo dapprima il caso della gravità pura, cioè il caso in cui è assente la materia.

Supponiamo di avere due sistemi di coordinate, le coordinate x e quelle y .

La covarianza generale richiede che le equazioni del moto abbiano la stessa forma in entrambi i sistemi di coordinate, cioè richiede che noi abbiamo esattamente la stessa equazione differenziale da risolvere in entrambi i sistemi di coordinate, ad eccezione del fatto che in un sistema la variabile indipendente è x e che nell'altro sistema la variabile indipendente è y .

Una volta che abbiamo trovato una funzione metrica $g_{ab}(x)$ che risolve le equazioni del moto nelle coordinate x , sappiamo immediatamente come ricavare la metrica nelle coordinate y .

Siccome entrambe le funzioni metriche hanno la stessa forma funzionale ma appartengono a diversi sistemi di coordinate, esse impongono differenti geometrie dello spazio-tempo.

Così abbiamo generato una seconda soluzione **distinta!**

Ora viene il problema.

Supponiamo che i due sistemi di coordinate coincidano inizialmente, cioè al tempo $t=0$, ma che ad un qualche punto dopo $t=0$ essi non coincidano più.

Allora abbiamo due soluzioni, con le stesse condizioni iniziali e che impongono differenti geometrie dello spazio-tempo.

La conclusione è che la relatività generale NON determina il tempo proprio tra punti spazio-temporali!

Una raffinazione di questo argomento è quello che è noto come argomento della lacuna di Einstein (*Einstein's hole argument*).

L'inclusione della materia non modifica il ragionamento: in questo caso si ha un set maggiore di equazioni differenziali ma esse hanno ancora la stessa forma in tutti i sistemi di coordinate.

Pertanto viene applicato lo stesso argomento e si ottengono ancora due soluzioni con le stesse condizioni iniziali che impongono differenti geometrie dello spazio-tempo.

È molto importante osservare che non avremmo potuto generare queste extra soluzioni distinte se lo spazio-tempo fosse stato fisso e non-dinamico.

Ad una prima occhiata l'argomento della lacuna non sembra una buona notizia: lo stesso Einstein era preoccupato.

Nel 1912 pubblicò un lavoro intitolato "Verso una teoria della gravitazione" nel quale sosteneva che bisognava abbandonare la covarianza generale!

Comunque, dopo un piccolo successo nel trovare le corrette equazioni di campo, nel 1915 Einstein ritornò alla covarianza generale.

Infatti Einstein realizzò come fosse possibile la coesistenza tra il principio della covarianza generale e l'argomento della lacuna.

Prima di capire come questo avvenga ci occorre comprendere meglio queste extra soluzioni.

Possiamo interpretare queste extra soluzioni distinte nel modo seguente.

Per semplicità consideriamo dapprima il caso di assenza di materia.

Definiamo una funzione metrica \tilde{g}_{ab} il cui valore nel punto P sia uguale al valore della funzione metrica g_{ab} al punto P_0 , cioè:

$$\tilde{g}_{ab}(P) = g_{ab}(P_0). \quad (4.1.2)$$

Ora consideriamo un sistema di coordinate che assegna a P gli stessi valori di coordinate che P_0 ha nelle coordinate x.

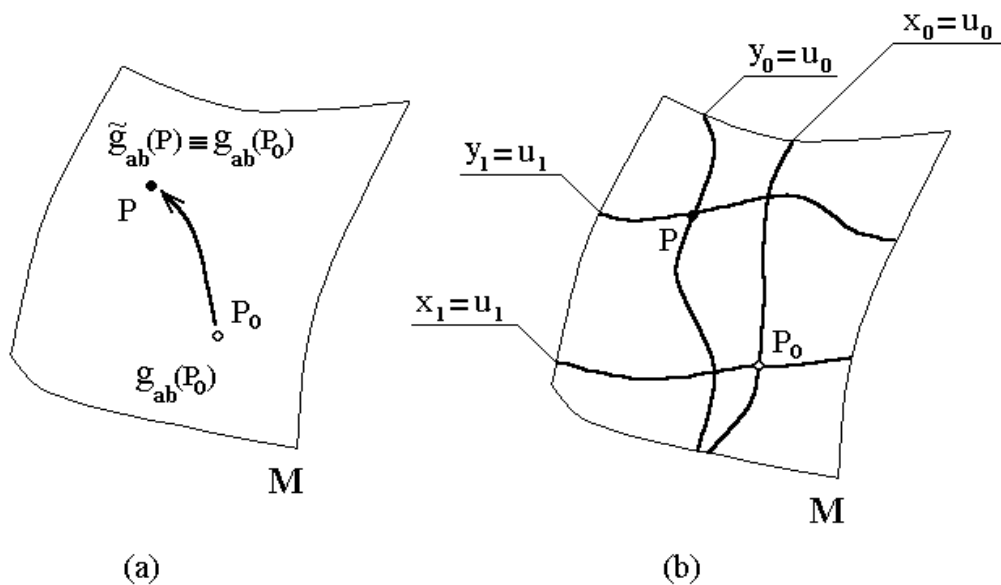
Quindi abbiamo:

$$\tilde{g}_{ab}(y_0 = u_0, y_1 = u_1, y_2 = u_2, y_3 = u_3) = g_{ab}(x_0 = u_0, x_1 = u_1, x_2 = u_2, x_3 = u_3), \quad (4.1.3)$$

dove u_0, u_1, u_2, u_3 sono i valori delle coordinate di P_0 nel sistema delle coordinate x.

Supponendo che i valori delle coordinate possano correre su tutti i valori permessi, allora l'equazione (4.1.3) è precisamente la condizione che le due funzioni metriche abbiano la stessa forma funzionale!

Vediamo che la nuova soluzione è generata trascinando la funzione metrica originale sopra la varietà dello spazio-tempo tenendo le linee delle coordinate "attaccate", come mostrato nella seguente figura:



È importante capire che qui non abbiamo effettuato una trasformazione di coordinate: in realtà quello che abbiamo effettuato è ciò che è noto come un *diffeomorfismo attivo* (mentre invece le trasformazioni di coordinate sono chiamate *diffeomorfismi passivi*).

Per spaziotempo piatto il diffeomorfismo attivo si riduce alle trasformazioni di Lorentz.

Dovrebbe essere facile vedere che quando è presente anche la materia, l'effettuare simultaneamente un diffeomorfismo attivo sul campo gravitazionale e su quello della materia genera la nuova soluzione distinta.

Per comprendere cosa significhi ciò, ci basiamo principalmente sulla spiegazione data in [13].

La relatività generale non determina la distanza tra punti spazio-temporali.

Pertanto potrebbe non avere significato fisico come il campo gravitazionale e quello della materia siano localizzati sullo spazio-tempo, e così pure i valori che essi assumono nei punti dello spazio-tempo.

Quello che la relatività generale determina sono le mutue relazioni che esistono tra il campo gravitazionale ed i campi di materia (cioè il valore che il campo gravitazionale assume dove il campo di materia assume questo o quel valore).

Da queste mutue relazioni possiamo formare un concetto di materia che è localizzata rispetto al campo gravitazionale e viceversa.

Quello che Einstein scoprì è che un'entità fisica è localizzata solamente rispetto ad un'altra entità fisica e non rispetto alla varietà dello spazio-tempo.

Questo è ciò che s'intende per indipendenza dal background!

Schematicamente:

SPAZIO-TEMPO DINAMICO+DETERMINISMO+INVARIANZA DI COORDINATE
GENERALE $\Rightarrow \Rightarrow$ INDIPENDENZA DAL BACKGROUND

(4.1.4)

L'invarianza di coordinate generale è semplicemente l'affermazione che non importa quale sistema di coordinate venga usato per descrivere un sistema, mentre il determinismo viene solitamente supposto che sia verificato in ogni teoria fisica.

Si è tentati di credere che ogni sistema di riferimento abbia il proprio concetto di lunghezza, così come ce l'hanno gli osservatori inerziali in relatività speciale.

Comunque non è così nel caso della relatività generale, il che è dovuto al fatto che la metrica è dinamica e quindi non fissata.

Dalla relatività speciale abbiamo imparato che la posizione ed il moto hanno significato solo relativamente ad un frame inerziale.

Invece la relatività generale ci insegna che non esistono del tutto sistemi di riferimento geometrici del background: la posizione ed il moto sono diventati completamente relativi!

Quindi lo spazio-tempo scompare e lascia il posto al campo gravitazionale.

Quello che Newton chiamava spazio, e Minkowski chiamava "spaziotempo", è stato smascherato: esso non è altro che un oggetto dinamico, il campo gravitazionale, in un regime nel quale trascuriamo la sua dinamica.

Inizialmente può sembrare difficile immaginare il mondo attorno a noi come se non consistesse di un background sul quale si muovono le entità fisiche.

Che non ci sia spazio forse non è troppo difficile da immaginare: basta pensare ad una sorta di realtà virtuale, che comprende ogni cosa, incluso il nostro cervello che elabora le informazioni che esso riceve.

Noi siamo abituati a pensare ad un spazio con sopra degli oggetti, con una distanza tra essi.

Ma sappiamo che questo non è reale.

Che non ci sia il tempo, comunque, è forse un po' più difficile da immaginare.

In base a quanto abbiamo detto, ogni quantità la cui definizione è dipendente da un sistema di coordinate non può essere osservata in relatività generale.

Per esempio, consideriamo una superficie Σ che è definita in modo astratto come un set di punti in un sistema di coordinate.

L'area di questa superficie è data da:

$$A(\Sigma) = \int_{\Sigma} dS. \quad (4.1.5)$$

Questa quantità può essere invariante sotto trasformazioni di coordinate, ma non è invariante sotto un diffeomorfismo attivo, perché sotto una tale trasformazione la superficie rimane dove si trova, mentre la metrica viene trascinata attraverso la varietà.

Pertanto la nuova metrica impone una differente geometria dello spaziotempo e così assegna un'area differente alla superficie.

Invece l'area di una superficie definita rispetto ad un oggetto fisico, come per esempio un tavolo, è un'osservabile.

Sotto una trasformazione attiva il world-sheet della superficie viene trascinato assieme alla metrica.

Per vedere questo, notiamo che il world-sheet del tavolo è trovato calcolando le geodetiche delle particelle che costituiscono il tavolo stesso.

Sotto un diffeomorfismo attivo otteniamo una nuova metrica e le geodetiche delle particelle devono ancora essere determinate per questa nuova metrica.

4.2 FORMULAZIONE DELLA BACKGROUND INDEPENDENT OPEN STRING FIELD THEORY

Sebbene possa essere mostrato che la teoria delle stringhe è indipendente dal background, le formulazioni di questa teoria che abbiamo esposto finora non rendono manifesta questa indipendenza, poiché esse solitamente richiedono di partire con una soluzione particolare, cioè con un background concreto, il che rende la matrice di scattering non-invariante sotto diffeomorfismo attivo.

Edward Witten ha parlato, nel suo lavoro [5], della necessità di una formulazione della teoria delle stringhe che sia indipendente dal background, dicendo che “questo problema è fondamentale perché è qui che in realtà che uno deve indirizzare la domanda di quale tipo di oggetto geometrico la stringa rappresenti”.

Come ha spiegato Smolin [14], “una formulazione della teoria delle stringhe che sia indipendente dal background deve avere uno spazio di Hilbert ed un'algebra osservabile la cui specificazione non faccia alcun riferimento a nessuna metrica classica”.

Una teoria delle stringhe indipendente dal background non deve supporre che ci siano delle stringhe vibranti in uno spaziotempo preesistente.

Deve invece essere una formulazione in assenza di spaziotempo nella quale invece lo spaziotempo emerga dal comportamento collettivo delle stringhe.

Nel paragrafo 2.4 abbiamo visto che il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ dello spaziotempo emerge come stato di stringa chiusa.

Però noi in realtà siamo interessati al caso delle stringhe aperte.

Questo è dovuto al fatto che la cubic string field theory (vedere il paragrafo 3.1) è definita solamente nel caso della stringa aperta, perché nel caso della stringa chiusa non esiste un prodotto associativo analogo al prodotto $*$ tra stringhe aperte (che ricordiamo era definito attraverso l'integrale funzionale che forma la sovrapposizione della metà destra di una stringa con la metà sinistra di un'altra stringa).

Pertanto, dato che si vogliono confrontare i risultati della cubic string field theory con quelli della background independent string field theory, ne segue che a tal fine la seconda teoria interesserà solamente nel caso delle stringhe aperte.

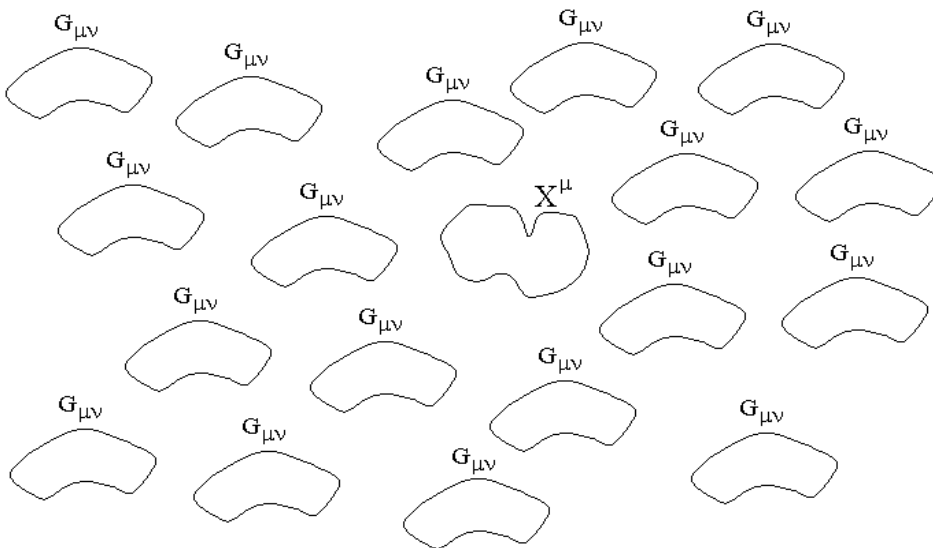
Questo comunque non vieta che sia definibile una teoria di campo di stringa indipendente dal background per il caso della stringa chiusa, che è il caso che interessa per far emergere lo spaziotempo dal comportamento collettivo delle stringhe.

In effetti la background independent closed string field theory è riportata in [2] nel caso in cui il background sia formato solamente dai campi del gravitone, del tensore antisimmetrico e del dilatone.

Per collegarci direttamente all'idea della indipendenza dallo spaziotempo di background di Einstein, esponiamo dapprima questa background independent closed string field theory, la quale ci permetterà di comprendere meglio il concetto di indipendenza dal background prima di passare alla teoria di stringa aperta (nella quale verrà considerato anche il campo tachionico, dato che il nostro scopo è mostrare come si può risolvere il problema del tachione).

Quindi cominciamo con il considerare una stringa chiusa che si propaga in un background di stringhe chiuse.

Dato che siamo interessati solamente a far vedere come lo spaziotempo emerga dal comportamento collettivo delle stringhe, cominciamo con il considerare un background formato solamente da gravitoni $G_{\mu\nu}$, come mostrato nella seguente figura:



In realtà abbiamo visto nel paragrafo 2.4 che lo stato di stringa chiusa con $M=1$ ha nel suo operatore di vertice un tensore $\xi_{\mu\nu}$, la cui la sua parte simmetrica $\xi_{(\mu\nu)}$, la sua parte antisimmetrica $\xi_{[\mu\nu]}$ e la sua parte di traccia ξ^μ_μ rappresentano rispettivamente il tensore di spaziotempo $G_{\mu\nu}$, il tensore antisimmetrico $B_{\mu\nu}$ ed il dilatone.

Quindi, anziché considerare una stringa chiusa che si propaga in un background di gravitoni, è più completo considerare una stringa chiusa che si propaga in un background di gravitoni, di tensori antisimmetrici e di dilatoni, che per semplicità supporremo classici.

Considerare dei campi di background classici vuol dire che essi non saranno soggetti ad alcuna fluttuazione quantistica.

L'idea della fluttuazione quantistica del campo gravitazionale fu originariamente proposta negli anni '60 da John Wheeler al fine di descrivere l'aspetto dello spaziotempo alla scala di 10^{-33} cm.

L'idea di base è che la gravità è un campo con molte delle proprietà fondamentali che hanno le altre forze fondamentali della natura, tra cui degli effetti quantistici.

Questo significa che lo stato di questo campo deve obbedire al principio d'indeterminazione di Heisenberg.

Questa indeterminazione significa che non possiamo conoscere con infinita precisione sia la geometria dello spaziotempo che la velocità di cambiamento di questa geometria.

Wheeler immaginò che questa indeterminazione dello spaziotempo richiedesse che alla scala di Planck di

10^{-33} cm ed alla scala di 10^{-43} secondi lo spaziotempo assumesse un aspetto "schiumoso", a causa degli improvvisi cambiamenti nella sua geometria a creare un insieme di forme e di strutture complesse, denominate *quantum foam*, come dettato dal principio di indeterminazione.

Queste non sono altro che delle oscillazioni di vuoto create da particelle virtuali, analoghe a quelle che sono state ipotizzate da Stephen Hawking per l'evaporazione dei buchi neri.

L'eventuale esistenza della quantum foam significa che in realtà non esisterà uno spaziotempo perfettamente piatto, e quindi che il tensore di spaziotempo piatto $\eta_{\mu\nu}$ non può essere una soluzione delle equazioni della gravità quantistica.

Quindi, nel supporre che il nostro background di stringhe chiuse sia formato da campi classici, significa che non stiamo considerando la quantum foam, e quindi che anche la metrica $\eta_{\mu\nu}$ può essere una soluzione delle equazioni dello spaziotempo.

L'azione di world-sheet di questo nostro sistema è:

$$\mathcal{S}_\sigma = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \sqrt{g} \left[(g^{ab} G_{\mu\nu}(X) + i\varepsilon^{ab} B_{\mu\nu}(X)) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \alpha' R\Phi(X) \right], \quad (4.2.1)$$

dove $B_{\mu\nu}(X)$ è il tensore antisimmetrico di stringa chiusa, $G_{\mu\nu}(X)$ è lo spaziotempo (cioè un background coerente di gravitoni), mentre $\Phi(X)$ e la parte diagonale di $G_{\mu\nu}(X)$ danno il dilatone.

Invece ε^{ab} rappresenta un tensore antisimmetrico, normalizzato in modo tale che $g^{1/2}\varepsilon^{12}=1$, mentre R rappresenta lo scalare di Ricci di world-sheet, cioè è costruito dalla metrica di world-sheet g^{ab} .

Una teoria di campo come quella definita dall'azione (4.2.1), nella quale il termine cinetico è dipendente dal campo in modo che lo spazio del campo sia una varietà curva, è noto per ragioni storiche come un *modello sigma nonlineare* (i modelli sigma nonlineari hanno avuto molte applicazioni nella fisica delle particelle e nella teoria di campo quantistica. Per esempio, i campi del pione neutri e carichi possono essere visti con buona approssimazione come coordinate sulla varietà di gruppo $SU(2)$).

Nonostante in linea di principio si possa operare anche senza delle approssimazioni perturbative, di seguito per semplicità supporremo che $B_{\mu\nu}$ e Φ siano piccoli, e che $G_{\mu\nu}$ sia prossimo al caso di metrica piatta $\eta_{\mu\nu}$.

In questo caso si dimostra [2] che:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(X) &= \eta_{\mu\nu} + \chi_{\mu\nu}(X), & \text{con} & \quad \chi_{\mu\nu}(X) = -4\pi g_c s_{\mu\nu} e^{ik \cdot X}, \\ B_{\mu\nu}(X) &= -4\pi g_c a_{\mu\nu} e^{ik \cdot X}, \\ \Phi(X) &= -4\pi g_c \phi e^{ik \cdot X}, \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

dove g_C rappresenta la costante di accoppiamento di stringa chiusa, mentre $s_{\mu\nu}$, $a_{\mu\nu}$ e ϕ sono rispettivamente una matrice simmetrica, una matrice antisimmetrica ed una costante. Procedendo in modo analogo a quanto fatto nel paragrafo 2.3 quando abbiamo determinato che $D=26$, qui si ricava che la traccia del tensore energia-impulso è:

$$T_a^a = -\frac{1}{2\alpha'} \beta_{\mu\nu}^G g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu - \frac{i}{2\alpha'} \beta_{\mu\nu}^B \varepsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu - \frac{1}{2} \beta^\Phi R, \quad (4.2.3)$$

dove, all'ordine lineare in $\chi_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ e Φ , si ha che:

$$\begin{aligned} \beta_{\mu\nu}^G &\approx -\frac{\alpha'}{2} \left(\partial^2 \chi_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial^\omega \chi_{\omega\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \chi_\omega^\omega \right) + 2\alpha' \partial_\mu \partial_\nu \Phi, \\ \beta_{\mu\nu}^B &\approx -\frac{\alpha'}{2} \partial^\omega H_{\omega\mu\nu}, \quad \text{con} \quad H_{\omega\mu\nu} \equiv \partial_\omega B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\omega} + \partial_\nu B_{\omega\mu}, \\ \beta^\Phi &\approx \frac{D-26}{6} - \frac{\alpha'}{2} \partial^2 \Phi. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

dove $\partial_\mu = \partial/\partial X^\mu$ e $\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu$.

In β^Φ è stata inclusa l'anomalia spaziotemporale trovata nel paragrafo 2.3, dove il numero 26 rappresenta il contributo derivante dai campi di ghost.

Per i coefficienti di T_a^a è stato il simbolo β perchè essi essenzialmente sono le funzioni beta del gruppo di rinormalizzazione.

Le anomalie di Weyl (4.2.4) hanno ulteriori contributi dagli ordini più alti nei campi.

Si dimostra che il risultato che tiene conto di tutti i termini fino a due derivate spaziotemporali è:

$$\begin{aligned} \beta_{\mu\nu}^G &= \alpha' R_{\mu\nu} + 2\alpha' \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{\alpha'}{4} H_{\mu\lambda\omega} H_\nu^{\lambda\omega} + O(\alpha'^2), \\ \beta_{\mu\nu}^B &= -\frac{\alpha'}{2} \nabla^\omega H_{\omega\mu\nu} + \alpha' \nabla^\omega \Phi H_{\omega\mu\nu} + O(\alpha'^2), \\ \beta^\Phi &= \frac{D-26}{6} - \frac{\alpha'}{2} \nabla^2 \Phi + \alpha' \nabla_\omega \Phi \nabla^\omega \Phi - \frac{\alpha'}{24} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} + O(\alpha'^2). \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Diversi termini nella (4.2.5) possono essere riconosciuti dall'approssimazione lineare (4.2.4), che ora è stata resa covariante sotto un cambio di coordinate spaziotemporali.

La condizione che la teoria di world-sheet sia invariante sotto trasformazione di Weyl è quindi:

$$\beta_{\mu\nu}^G = \beta_{\mu\nu}^B = \beta^\Phi = 0. \quad (4.2.6)$$

Queste sono le equazioni del moto del background.

L'equazione $\beta_{\mu\nu}^G=0$ assomiglia all'equazione di Einstein con termini di sorgente derivanti dal campo tensoriale antisimmetrico e da quello del dilatone.

Questa equazione contiene delle singolarità (cioè le soluzioni dei buchi neri e del big bang) dovute al fatto che abbiamo ipotizzato che lo spaziotempo fosse classico (infatti sembrerebbe che solamente combinando la meccanica quantistica con la teoria delle stringhe si riesca ad eliminare tali singolarità).

L'equazione $\beta^B_{\mu\nu}=0$ è la generalizzazione tensoriale antisimmetrica delle equazioni di Maxwell, che determina la divergenza della forza di campo.

Questo dimostra che le soluzioni del background emergono dal comportamento collettivo delle stringhe, ma questa è proprio la definizione di indipendenza dal background che abbiamo dato in precedenza.

Pertanto quella appena esposta rappresenta una “nuova” formulazione della teoria delle stringhe, che a differenza della formulazione descritta nel capitolo 2 rende manifesta l'indipendenza dal background (comunque si può mostrare che anche la formulazione del capitolo 2 è indipendente dal background, però non rende manifesta questa indipendenza, poiché essa richiede di partire con una soluzione particolare, cioè con un background concreto).

Quello che interessa è determinare l'azione S dalla quale, attraverso le formule di Eulero-Lagrange, si ottengono le equazioni del background (4.2.6).

Questa azione S è detta *azione di spaziotempo*, in opposizione all'azione di world-sheet S .

Si dimostra che l'azione di spaziotempo dalla quale si ricavano le (4.2.6) è:

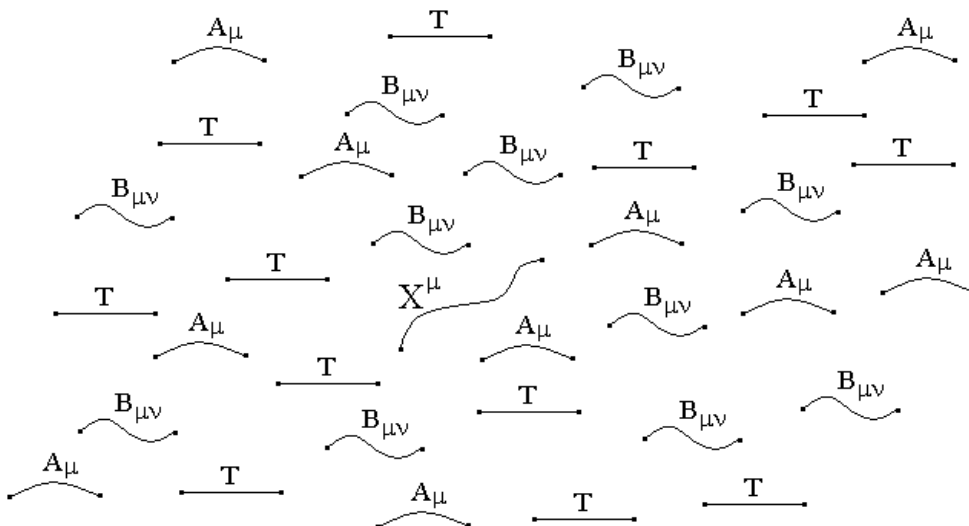
$$S = \frac{1}{2k_0^2} \int d^D x \sqrt{-G} e^{-2\Phi} \left[-\frac{2(D-26)}{3\alpha'} + R - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + O(\alpha') \right], \quad (4.2.7)$$

dove k_0 è una costante di normalizzazione, mentre qui R è lo scalare di Ricci di spaziotempo, cioè quello costruito attraverso la metrica di spaziotempo $G_{\mu\nu}$.

Quindi, minimizzando la (4.2.7) rispetto a $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ o Φ , si ottengono rispettivamente le equazioni $\beta^G_{\mu\nu}=0$, $\beta^B_{\mu\nu}=0$ o $\beta^\Phi=0$.

Lo scopo di questa tesi è di definire e studiare una teoria analoga a quella appena esposta, però nel caso della stringa aperta, ed inserendo nel background classico anche il campo del tachione (per capire come poterlo eliminare dalla teoria attraverso questa formulazione off-shell).

Pertanto consideriamo una stringa aperta che si sta propagando in mezzo a tante altre stringhe aperte:



Come mostrato nella figura, non abbiamo specificato quale sia lo stato della stringa propagante che stiamo considerando (proprio come fatto nel caso della stringa chiusa).

Questo significa che non abbiamo specificato se la stringa si trovi in uno stato di tipo tachionico (il quale sarebbe rappresentato da un operatore di vertice del tipo $:\exp(ik \cdot X):$), oppure in uno stato di tipo fotonico (rappresentato da un operatore di vertice del tipo $\xi_\mu : \partial X^\mu \exp(ik \cdot X):$), ...

Infatti abbiamo indicato la stringa semplicemente attraverso le sue coordinate X .

Nella figura abbiamo poi supposto che ciascuna delle altre stringhe aperte si trovi invece in uno dei possibili stati fisici di stringa aperta, come per esempio lo stato tachionico T , oppure lo stato A_μ , o quello $B_{\mu\nu}$, ... (i quali possono essere rappresentati dai corrispondenti operatori di vertice), e cioè abbiamo supposto che lo stato in cui ciascuna di essa si trova sia specificato.

Tutte le stringhe aperte che si trovano nello stato T costituiscono un cosiddetto background tachionico, mentre tutte quelle che si trovano nello stato A_μ definiscono un cosiddetto background fotonico, e così via.

Anche in questo caso supponiamo che i campi di background siano classici (proprio come fatto nel caso della stringa chiusa).

I campi (cioè le stringhe) di background interagiranno poi con la stringa propagante, cioè con quella di coordinate X generiche.

Come detto in [2], è possibile immaginarsi diversi modi in cui le stringhe possono interagire tra loro.

Uno potrebbe essere un'interazione di contatto, cioè un'energia che respinge od attira tra loro le stringhe quando esse si intersecano.

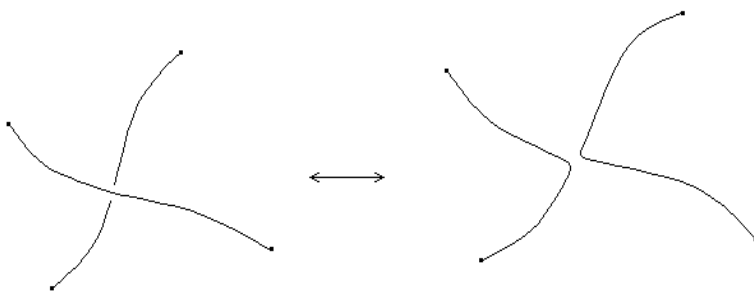
Un'altra possibile interazione che si può pensare è una forza a lungo raggio mediata da qualche campo quantistico.

Però in realtà si dimostra che non è possibile *aggiungere* tali interazioni alla teoria di stringa in un modo che sia consistente con le simmetrie.

Piuttosto, le uniche interazioni che sono permesse sono quelle che sono già implicite nella somma su tutti i possibili world-sheets.

Quindi, se le due interazioni prima riportate non sono possibili, ne segue che l'unico modo in cui due stringhe aperte possono interagire tra di loro è ai loro estremi, entrando in contatto tra di loro.

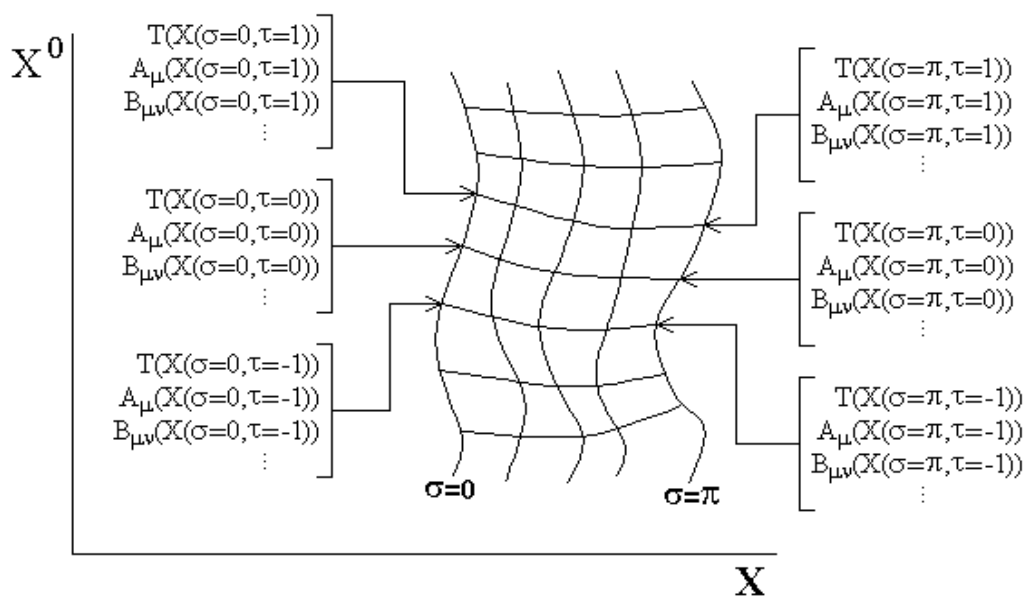
Certamente due stringhe aperte potrebbero interagire tra di loro anche nel seguente modo:



In tal caso effettivamente si vede che esse hanno interagito tra di loro in un punto intermedio, però come abbiamo detto prima questo processo non avviene attraverso lo scambio di una forza tra i due punti intermedi e quindi non rientra in quella che noi intendiamo per interazione.

Per noi un'interazione è infatti solamente lo scambio di una forza tra due stringhe.

Quindi, se l'unico modo in cui due stringhe aperte possono interagire tra di loro è ai loro estremi, entrando in contatto tra di loro:



ne segue che l'azione di world-sheet di questo sistema è:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_{INT}, \quad (4.2.8)$$

dove:

$$\mathcal{S}_0 = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d\tau d\sigma \sqrt{g} g^{ab} \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \quad (4.2.9)$$

è l'azione libera, mentre:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{INT} = & \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[T(X(\tau, \sigma)) + A_\mu(X(\tau, \sigma)) \partial_\tau X^\mu(\tau, \sigma) + B_{\mu\nu}(X(\tau, \sigma)) \partial_\tau X^\mu(\tau, \sigma) \partial_\tau X^\nu(\tau, \sigma) + \dots \right]_{\sigma=0} + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[T(X(\tau, \sigma)) + A_\mu(X(\tau, \sigma)) \partial_\tau X^\mu(\tau, \sigma) + B_{\mu\nu}(X(\tau, \sigma)) \partial_\tau X^\mu(\tau, \sigma) \partial_\tau X^\nu(\tau, \sigma) + \dots \right]_{\sigma=\pi} \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

è l'azione d'interazione.

Nella (4.2.10) il primo termine rappresenta l'interazione tra il background e l'estremo $\sigma=0$ della stringa aperta, mentre il secondo termine rappresenta l'interazione tra il background e l'estremo $\sigma=\pi$ della stringa aperta.

L'azione d'interazione è stata scritta come riportato nella (4.2.10) perchè abbiamo proceduto per analogia con il caso delle stringhe chiuse prima mostrato.

Infatti, come si vede dalle (4.2.2), i campi di background di stringa chiusa $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ e Φ sono dati proprio dai loro operatori di vertice.

Pertanto nel caso della stringa aperta abbiamo scritto l'interazione attraverso gli operatori di vertice di $T, A_\mu, B_{\mu\nu}, \dots$

Sappiamo che, al fine di eliminare le anomalie che si formano a livello quantistico, la teoria deve essere invariante sotto trasformazione conforme.

L'azione S_0 in effetti è invariante sotto trasformazione conforme, ma l'azione S_{INT} non lo è.

Pertanto dobbiamo imporre che la S_{INT} sia anch'essa invariante sotto trasformazione conforme.

Questo equivale a porre uguali a zero i coefficienti della traccia del tensore energia-impulso (che in generale non sono nulli).

Però i coefficienti della traccia del tensore energia-impulso dipendono solamente dai campi del background, e quindi il porre uguali a zero questi coefficienti definisce delle equazioni che determinano l'evoluzione del background stesso.

I coefficienti della traccia del tensore energia-impulso sono sostanzialmente le funzioni beta del gruppo di rinormalizzazione, e quindi, dato che le equazioni del background sono date dal loro annullamento, ne segue che l'evoluzione del background è determinata dai punti fissi del gruppo di rinormalizzazione.

Questo è esattamente uguale a quanto visto prima nel caso delle stringhe chiuse.

Ora vogliamo determinare l'azione di spaziotempo per questo nostro sistema di stringhe aperte.

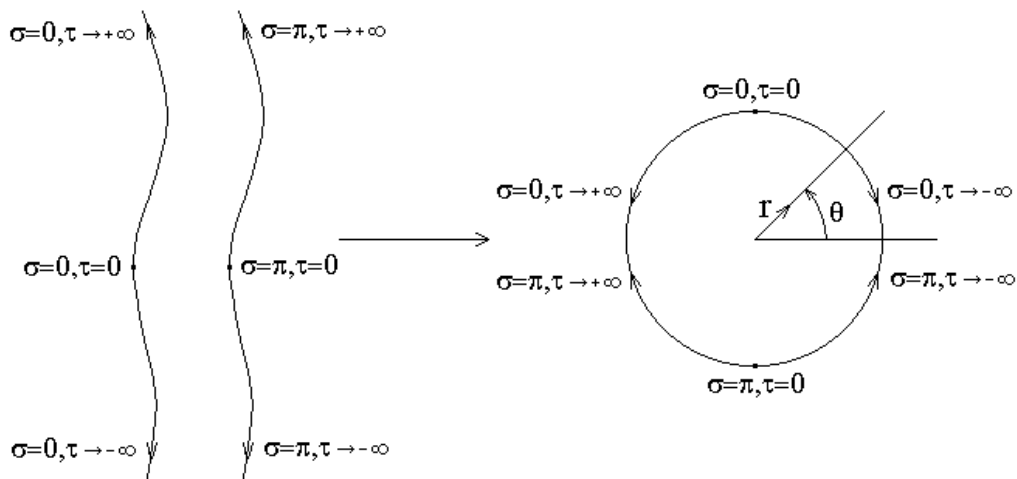
Il motivo che spinge a determinare l'azione di spaziotempo è rappresentato dal fatto che tale azione, calcolata nel caso in cui il background di stringa aperta sia puramente tachionico e valutata ad impulso nullo, costituisce il potenziale del campo tachionico stesso, il quale è fondamentale per lo studio delle congetture di Sen e del processo di condensazione tachionica.

Per semplicità viene trattato il caso della stringa classica, e quindi viene considerato un world-sheet Σ senza buchi (qualora si vogliono determinare gli effetti quantistici del sistema, basta inserire l'azione classica nel path-integral).

È più comodo trattare il caso della stringa classica dopo aver effettuato la seguente trasformazione conforme:

$$(\sigma, \tau) \rightarrow (z, \bar{z}), \quad \text{dove} \quad z \equiv \frac{e^{-i\sigma + \tau} + i}{e^{-i\sigma + \tau} - i}. \quad (4.2.11)$$

Infatti, dopo questa trasformazione, il generico world-sheet Σ senza buchi viene mappato nella geometria più comoda di un disco di raggio unitario, come mostrato nella seguente figura:



dove:

$$r = |z| = \left| \frac{e^{-i\sigma+\tau} + i}{e^{-i\sigma+\tau} - i} \right| = \frac{e^{2\tau} - 2e^{\tau} \operatorname{sen}\sigma + 1}{e^{2\tau} + 2e^{\tau} \operatorname{sen}\sigma + 1} \quad (4.2.12)$$

$$\theta = \operatorname{fase}(z) = \operatorname{fase} \left(\frac{e^{-i\sigma+\tau} + i}{e^{-i\sigma+\tau} - i} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - e^{\tau} \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + e^{\tau} \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \right)$$

sono rispettivamente la variabile radiale e quella angolare sul disco.

Osserviamo ora che in particolare per l'estremo $\sigma=0$ della stringa aperta si ha che:

$$\sigma = 0 \rightarrow z = \frac{e^{\tau} + i}{e^{\tau} - i} = \cos \left[2 \operatorname{arctg} \left(e^{-\tau} \right) \right] + i \operatorname{sen} \left[2 \operatorname{arctg} \left(e^{-\tau} \right) \right], \quad (4.2.13)$$

che ha modulo $r=1$ e quindi sta sul bordo del disco unitario, $\forall \tau \in [-\infty, +\infty]$.

Per quanto riguarda la fase invece si osserva che:

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \operatorname{arctg} \left(e^{-\infty} \right) = 0 \\ \theta &= 2 \operatorname{arctg} \left(e^{-0} \right) = \frac{\pi}{2} \\ \theta &= 2 \operatorname{arctg} \left(e^{+\infty} \right) = \pi \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

cioè al variare di τ da $-\infty$ a $+\infty$ otteniamo tutti i punti di metà del bordo del disco unitario.

I punti dell'altra metà sono dati dall'estremo $\sigma=\pi$ della stringa aperta.

Infatti:

$$\sigma = \pi \rightarrow z = \frac{e^{\tau} - i}{e^{\tau} + i} = \cos \left[-2 \operatorname{arctg} \left(e^{-\tau} \right) \right] + i \operatorname{sen} \left[-2 \operatorname{arctg} \left(e^{-\tau} \right) \right], \quad (4.2.15)$$

che ha modulo $r=1$, ed inoltre:

$$\begin{aligned} \theta &= -2 \operatorname{arctg} \left(e^{-\infty} \right) = 0 \\ \theta &= -2 \operatorname{arctg} \left(e^{-0} \right) = -\frac{\pi}{2} \\ \theta &= -2 \operatorname{arctg} \left(e^{+\infty} \right) = -\pi \cong \pi \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

che corrisponde proprio all'altra metà del bordo del disco unitario.

Pertanto, in seguito alla trasformazione (4.2.11), il generico world-sheet Σ senza buchi viene mappato in un disco di raggio unitario, ed in particolare gli estremi $\sigma=0$ e $\sigma=\pi$ della stringa aperta vengono mappati sul bordo del disco, al variare di τ da $-\infty$ a $+\infty$.

Ma dato che l'interazione con il background avviene proprio agli estremi della stringa, essa verrà mappata sul bordo del disco.

Pertanto l'azione di world-sheet (4.2.10) viene trasformata nella seguente azione di world-sheet:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_{INT} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_D d^2\sigma \partial^a X^\mu \partial_a X_\mu + \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \left[T(X(\theta)) + A_\mu(X(\theta)) \partial_\theta X^\mu(\theta) + B_{\mu\nu}(X(\theta)) \partial_\theta X^\mu(\theta) \partial_\theta X^\nu(\theta) + \dots \right], \quad (4.2.17)$$

dove D rappresenta il disco di raggio unitario.

4.3 L'AZIONE DI SPAZIOTEMPO

Il primo lavoro nel quale è mostrato come calcolare l'azione di spaziotempo per questa teoria è l'articolo [5] di Edward Witten del 1993.

Qui Witten ha spiegato di essere partito dalla formulazione di world-sheet (cioè di modello σ), e cioè dall'azione (4.2.17), perché essa è l'unica formulazione conosciuta nella quale ogni cosa possa essere effettuata in un modo che sia manifestamente indipendente dal background (come del resto abbiamo visto in precedenza nel caso delle stringhe chiuse).

Questo approccio comporta l'uso del cosiddetto *formalismo di Batalin-Vilkovisky* [15][16][17] per definire implicitamente l'azione di spaziotempo cercata.

Come detto da Witten, l'uso di questo formalismo viene suggerito dal suo ruolo nel costruire e comprendere la teoria di campo di stringa chiusa classica e quantistica [18], nel suo elegante uso nel quantizzare la teoria di campo di stringa aperta [19][20], e nel suo ruolo nelle identità di Ward nella teoria delle stringhe [21][22].

Per brevità chiamiamo la lagrangiana della \mathcal{S}_{INT} con il simbolo \mathcal{V} :

$$\mathcal{V} = T(X(\theta)) + A_\mu(X(\theta)) \partial_\theta X^\mu(\theta) + B_{\mu\nu}(X(\theta)) \partial_\theta X^\mu(\theta) \partial_\theta X^\nu(\theta) + \dots \quad (4.3.1)$$

Se \mathcal{V} coinvolge termini con due o più derivate rispetto a θ , i quali corrispondono a stati massivi nello spazio di Hilbert di stringa aperta in prima quantizzazione, allora la teoria potrebbe essere mal definita come teoria di campo bidimensionale, poiché tali termini rappresentano delle interazioni non-rinormalizzabili sul world-sheet.

Di conseguenza, dobbiamo introdurre in generale un parametro di cut-off ultravioletto, ma nel caso speciale della condensazione tachionica dobbiamo occuparci solamente della perturbazione rilevante $T(X)$, così in tal caso possiamo evitare il problema della divergenza ultravioletta.

L'interazione \mathcal{V} , che consiste di operatori locali con ghost number 0 (il ghost number è stato definito al paragrafo 2.3), è considerata essere definita da un certo operatore \mathcal{O} più 'fondamentale', come in [5][9]:

$$\mathcal{V} = b_{-1} \mathcal{O}, \quad (4.3.2)$$

dove \mathcal{O} ha ghost number +1.

Se \mathcal{V} consiste puramente di materia (X) senza alcun ghost, allora la (4.3.2) è equivalente a:

$$\mathcal{O} = d\mathcal{V}. \quad (4.3.3)$$

D'ora in poi considereremo questo caso particolare.

Indicando con \mathcal{V}_i gli elementi di una base per gli operatori di ghost number 0, l'interazione al bordo \mathcal{V} è scritta come:

$$\mathcal{V} = \sum_i t^i \mathcal{V}_i, \quad (4.3.4)$$

dove i coefficienti t^i sono accoppiamenti sulla teoria di world-sheet, i quali sono interpretati come campi dal punto di vista dello spaziotempo.

Dalla (4.3.3) ne segue allora che:

$$\mathcal{O} = \sum_i t^i \mathcal{O}_i, \quad \mathcal{O}_i = d\mathcal{V}_i. \quad (4.3.5)$$

Usando questi risultati ed il formalismo di Batalin-Vilkovisky, si dimostra [5] che l'azione di spaziotempo S è definita da:

$$dS = \frac{K}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \langle d\mathcal{O}(\theta) \{Q_B, \mathcal{O}(\theta')\} \rangle_{\mathcal{V}}, \quad (4.3.6)$$

cioè da:

$$\frac{\partial S}{\partial t^i} = \frac{K}{2} \int \frac{d\theta}{2\pi} \int \frac{d\theta'}{2\pi} \langle \mathcal{O}_i(\theta) \{Q_B, \mathcal{O}(\theta')\} \rangle_{\mathcal{V}}, \quad (4.3.7)$$

dove Q_B come al solito rappresenta la carica BRST, mentre K rappresenta un fattore di normalizzazione che qui è lasciato indeterminato.

Invece $\langle \dots \rangle_{\mathcal{V}}$ rappresenta la funzione di correlazione non-normalizzata nella teoria di campo di world-sheet bidimensionale, valutato con tutta l'azione di world-sheet (4.2.17), e cioè anche con il termine di perturbazione \mathcal{V} .

4.4 GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE DEL WORLD-SHEET

Sebbene la teoria sia conforme all'interno del disco, l'interazione al boundary può avere operatori arbitrari rilevanti (cioè quello tachionico) od irrilevanti (cioè quelli massivi).

A causa di questo carattere non conforme dell'interazione sul bordo, le costanti di accoppiamento t^i cambiano (fluiscono) sotto un cambiamento di scala.

Quando scriviamo l'azione di spaziotempo della background independent open string field theory, è utile utilizzare le funzioni β per i vari accoppiamenti t^i (analogamente a quanto mostrato nel caso della stringa chiusa al paragrafo 4.2).

Dapprima, per un campo *primario* \mathcal{V}_i di peso conforme Δ_i (vedere la (A.3.44) per la definizione di campo primario), abbiamo:

$$\{Q_B, c\mathcal{V}_i\} = (1 - \Delta_i) c\partial c\mathcal{V}_i. \quad (4.4.1)$$

Inoltre definiamo una 'metrica' dello spazio degli accoppiamenti come:

$$G_{ij}(t) \equiv 2K \int \frac{d\theta d\theta'}{(2\pi)^2} \text{sen}^2 \frac{\theta - \theta'}{2} \langle \mathcal{V}_i(\theta) \mathcal{V}_j(\theta') \rangle_{\mathcal{V}}, \quad (4.4.2)$$

dove il fattore sen^2 è determinato dal correlatore di ghost a 3 punti $\langle c(\theta)c\partial c(\theta') \rangle_{\text{ghost}}$. Osservando poi che:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_i(\theta) \{Q_B, \mathcal{O}(\theta')\} \rangle_{\mathcal{V}} &= \left\langle c\mathcal{V}_i(\theta) \left\{ Q_B, c \sum_j t^j \mathcal{V}_j(\theta') \right\} \right\rangle_{\mathcal{V}} = \sum_j t^j \langle c\mathcal{V}_i(\theta) \{Q_B, c\mathcal{V}_j(\theta')\} \rangle_{\mathcal{V}} = \\ &= \sum_j t^j \langle c\mathcal{V}_i(\theta) (1 - \Delta_j) c\partial c\mathcal{V}_j(\theta') \rangle_{\mathcal{V}} = \sum_j t^j (1 - \Delta_j) \langle c\mathcal{V}_i(\theta) c\partial c\mathcal{V}_j(\theta') \rangle_{\mathcal{V}} \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

(avendo utilizzato le (4.3.5) e (4.4.1)) e che:

$$\langle c\mathcal{V}_i(\theta) c\partial c\mathcal{V}_j(\theta') \rangle_{\mathcal{V}} = -4\text{sen}^2 \frac{\theta - \theta'}{2} \langle \mathcal{V}_i(\theta) \mathcal{V}_j(\theta') \rangle_{\mathcal{V}}, \quad (4.4.4)$$

ne segue che la (4.3.7) diventa:

$$\frac{\partial S}{\partial t^i} = -2K \sum_j t^j (1 - \Delta_j) \int \frac{d\theta d\theta'}{(2\pi)^2} \text{sen}^2 \frac{\theta - \theta'}{2} \langle \mathcal{V}_i(\theta) \mathcal{V}_j(\theta') \rangle_{\mathcal{V}} = -\sum_j t^j (1 - \Delta_j) G_{ij}(t) \quad (4.4.5)$$

(avendo utilizzato la (4.4.2)).

Si dimostra che la metrica G_{ij} ha la proprietà di essere definita positiva ed invertibile in una teoria unitaria.

La (4.4.5) non può essere vera in generale, siccome essa non trasforma in modo covariante sotto delle riparametrizzazioni dello spazio delle teorie, $t^i \rightarrow f^i(t^i)$.

Infatti $\partial S / \partial t^i$ e G_{ij} trasformano come vettori e tensori, ma t^i no (in analogia con la relatività generale).

La corretta generalizzazione covariante della (4.4.5) è stata data da Samson L. Shatashvili in [23] [24].

In questi due lavori Shatashvili ha ripreso e raffinato il lavoro di Witten, mostrando che la corretta generalizzazione covariante della (4.4.5) fa uso della funzione β del gruppo di rinormalizzazione (RG).

Infatti il flusso del gruppo di rinormalizzazione del world-sheet definisce un campo vettoriale naturale sullo spazio delle teorie, che è appunto la funzione β :

$$x \frac{dt^i}{dx} = \beta^i(t), \quad (4.4.6)$$

(dove x è una scala di distanza, mentre dove β^i è la funzione β dell'accoppiamento t^i), la quale trasforma come un vettore covariante sotto riparametrizzazioni di t^i .

Pertanto la generalizzazione covariante della (4.4.5) è:

$$\frac{\partial S}{\partial t^i} = -\beta^j G_{ij}(t), \quad (4.4.7)$$

dove la somma su j è sottintesa.

Come mostrato in [23][24], dalla (4.4.7) si può ricavare che:

$$S = Z(t^i) - \beta^i \frac{\delta Z(t^i)}{\delta t^i}, \quad (4.4.8)$$

dove $Z(t^i)$ è la funzione di partizione della teoria di stringa aperta sul disco (nel paragrafo 4.7 vedremo come si fa a ricavare questa formula nel caso in cui si scelga di studiare fenomeni off-shell. Questa dimostrazione si baserà sulla conoscenza delle soluzioni dell'equazione del moto del tachione, che si ottengono ponendo $\beta=0$).

Se assumiamo che le derivate totali dentro alla funzione di correlazione si disaccoppino e che non ci siano termini di contatto, si scopre che la funzione β è lineare.

Questo implica che le equazioni del moto derivate dalla (4.4.7) siano lineari.

Comunque, come mostrato da Shatashvili in [23][24], i termini di contatto prima mostrati nel calcolo sul world-sheet non possono essere ignorati.

Il punto è che l'operatore Q_B , che è l'operatore BRST del bulk e che quindi dovrebbe essere indipendente dagli accoppiamenti perchè la perturbazione è sul bordo, effettivamente dipende dagli accoppiamenti quando l'integrale di contorno si avvicina al bordo del disco.

Di conseguenza la funzione β deve essere non-lineare:

$$\beta^i = (1 - \Delta_i) t^i + \alpha^i_{jk} t^j t^k + \gamma^i_{jkl} t^j t^k t^l + \dots \quad (4.4.9)$$

In accordo con il cosiddetto *teorema di Poincarè-Dulac* [25], ciascun campo vettoriale può essere linearizzato attraverso un'appropriata ridefinizione delle coordinate, a parte un termine risonante. Nel secondo ordine dell'equazione (4.4.9) la condizione di risonanza è data da:

$$\Delta_j + \Delta_k - \Delta_i = 1. \quad (4.4.10)$$

Quando questa condizione di risonanza è soddisfatta, la funzione β non può essere perfettamente linearizzata attraverso una trasformazione di coordinate, perchè tutti i termini non-lineari non possono essere rimossi dall'equazione (4.4.9).

Quando t^i è il campo tachionico $T(k)$, la condizione di risonanza (4.4.10) corrisponde esattamente alla condizione di mass-shell per tre tachioni.

Pertanto, quando la condizione di risonanza non è verificata, cioè quando si studiano fenomeni off-shell (come la condensazione tachionica), la funzione β può essere presa lineare, ma quando la condizione di risonanza è verificata, cioè quando si studiano fenomeni on-shell (cioè quando si lavora sul vuoto instabile), nella funzione β compaiono dei termini non-lineari, i quali non possono essere trascurati.

Se si sceglie di studiare fenomeni off-shell e se si effettua una riparametrizzazione nello spazio degli accoppiamenti che linearizzi la funzione β , dalla (4.4.9) si vede che:

$$\beta^i = (1 - \Delta_i) t^i, \quad (4.4.11)$$

e quindi in questo caso la (4.4.5) e la (4.4.7) sono esattamente uguali.

Questo è importante perchè nel paragrafo 4.7, quando ricaveremo la (4.4.8) nel caso di fenomeni off-shell e conoscendo già la soluzione dell'equazione $\beta=0$ per il tachione, partiremo dalla (4.4.5).

4.5 RINORMALIZZAZIONE DEL CAMPO TACHIONICO

In termini del campo tachionico T la teoria è divergente (come vedremo successivamente), ma super rinormalizzabile.

Pertanto, al fine di rinormalizzare la teoria, si comincia con l'inserire un cut-off ultravioletto ε (che poi dovrà essere eliminato) nell'interazione:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi} \int_D d\sigma d\tau \partial^a X^\mu \partial_a X_\mu + \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} T(X(\theta)). \quad (4.5.1)$$

Come si fa nella rinormalizzazione della teoria dei campi della particella puntiforme, anche per la nostra teoria cominciamo con il definire la cosiddetta *azione efficace*, cioè l'azione (da trattare come un'azione classica) dalla quale si ottengono le equazioni del moto quantistiche.

Per definire l'azione efficace nel caso di un generico campo $\varphi(x)$ nel caso della particella puntiforme, si parte dalla definizione di momento della meccanica classica:

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dq}{dt} \right)}. \quad (4.5.2)$$

dove \mathcal{L} rappresenta la densità di lagrangiana del sistema.

Ora vogliamo promuovere il tutto a livello funzionale.

A tal fine si suppone che $-\log Z[J]$ (dove $Z[J]$ rappresenta il funzionale generatore) sia l'analogo funzionale di \mathcal{L} , e che J sia l'analogo funzionale di dq/dt .

Pertanto l'analogo funzionale di p sarà:

$$\begin{aligned} -\frac{\delta \log Z[J]}{\delta J(x)} &= -\frac{\delta}{\delta J(x)} \left(\frac{\mathcal{N} \int [D\varphi] e^{-\int d^4x (\mathcal{L} + J\varphi)}}{\mathcal{N} \int [D\varphi] e^{-\int d^4x (\mathcal{L} + J\varphi)}} \right) = -\frac{\int [D\varphi] \left(\int d^4y \varphi(y) \delta^{(4)}(y-x) \right) e^{-\int d^4x (\mathcal{L} + J\varphi)}}{\int [D\varphi] e^{-\int d^4x (\mathcal{L} + J\varphi)}} = \\ &= \frac{\int [D\varphi] \varphi(x) e^{-\int d^4x (\mathcal{L} + J\varphi)}}{\int [D\varphi] e^{-\int d^4x (\mathcal{L} + J\varphi)}} = \frac{\langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle} \equiv \varphi_c(x), \end{aligned}$$

(4.5.3)

Qui $\varphi_c(x)$ rappresenta il valore di aspettazione di φ , che identifichiamo col valore classico del campo.

Nel ricavare la (4.5.3) abbiamo usato la formula della derivata funzionale:

$$\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)} = \delta^{(4)}(y-x). \quad (4.5.4)$$

In meccanica classica si definisce poi la (densità di) hamiltoniana del sistema attraverso la trasformata di Legendre:

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{L} - p \left(\frac{dq}{dt} \right) \Big|_{\frac{dq}{dt} = f(p)}. \quad (4.5.5)$$

L'analogo funzionale di questa trasformazione è:

$$\mathcal{S}_{eff}[\varphi_c] \equiv -\log Z[J] - \int d^4x J(x) \varphi_c(x) \Big|_{J=f(\varphi_c)}, \quad (4.5.6)$$

dove $\mathcal{S}_{eff}[\varphi_c]$ rappresenta l'azione effettiva del sistema.

In particolare, dalla (4.5.6) ne segue che:

$$\mathcal{S}_{eff}[\varphi_c] = -\log Z[0]. \quad (4.5.7)$$

Nel caso che interessa a noi, cioè quello della stringa aperta, cominciamo seguendo l'articolo [26]. Consideriamo l'azione di world-sheet nella seguente forma:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{y>0} dx dy \eta^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\varepsilon} \int d^{26} k T(k) e^{ik \cdot X}. \quad (4.5.8)$$

Ora espandiamo X^μ attorno ad una qualche soluzione classica X_0^μ che soddisfi l'equazione del moto classica e che vari lentamente rispetto alla scala di cut-off:

$$X^\mu = X_0^\mu + Y^\mu. \quad (4.5.9)$$

Usiamo ora l'espressione (4.5.7) per definire l'azione efficace per la stringa aperta nel background tachionico:

$$\mathcal{S}_{eff}[X_0] = -\log Z[0], \quad (4.5.10)$$

dove:

$$Z[0] = e^{-\mathcal{S}_0[X_0]} \int [DY] e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{y>0} dx dy \eta^{ab} \partial_a Y_\mu \partial_b Y^\mu - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\varepsilon} \int d^{26} k T(k) e^{ik \cdot X_0} e^{ik \cdot Y}}. \quad (4.5.11)$$

Per il calcolo del path-integral nella (4.5.11) vogliamo usare le contrazioni in base al teorema di Wick.

$Z[0]$ può essere calcolato espandendo il suo esponenziale in potenze di $T(k)$:

$$\begin{aligned} & \int [DY] e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{y>0} dx dy \eta^{ab} \partial_a Y_\mu \partial_b Y^\mu - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\varepsilon} \int d^{26} k T(k) e^{ik \cdot X_0(x)} e^{ik \cdot Y(x)}} = \\ & = \int [DY] e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{y>0} dx dy \eta^{ab} \partial_a Y_\mu \partial_b Y^\mu} \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_1}{\varepsilon} \int d^{26} k_1 T(k_1) e^{ik_1 \cdot X_0(x_1)} e^{ik_1 \cdot Y(x_1)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_1}{\varepsilon} \int d^{26} k_1 T(k_1) e^{ik_1 \cdot X_0(x_1)} e^{ik_1 \cdot Y(x_1)} \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_2}{\varepsilon} \int d^{26} k_2 T(k_2) e^{ik_2 \cdot X_0(x_2)} e^{ik_2 \cdot Y(x_2)} \right] + \dots \right) = \\ & = \langle 1 \rangle - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_1}{\varepsilon} \int d^{26} k_1 T(k_1) e^{ik_1 \cdot X_0(x_1)} \langle e^{ik_1 \cdot Y(x_1)} \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} dx_2 \frac{1}{\varepsilon^2} \int d^{26} k_1 d^{26} k_2 e^{ik_1 \cdot X_0(x_1) + ik_2 \cdot X_0(x_2)} T(k_1) T(k_2) \langle e^{ik_1 \cdot Y(x_1) + ik_2 \cdot Y(x_2)} \rangle + \dots, \end{aligned}$$

(4.5.12)

dove:

$$\langle \dots \rangle \equiv \int [DY] (\dots) e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{y>0} dx dy \eta^{ab} \partial_a Y_\mu \partial_b Y^\mu}. \quad (4.5.13)$$

Nel calcolo di $Z[0]$ tutte le contrazioni sono calcolate in termini del propagatore sul bordo, nel quale viene inserito un cut-off come di seguito mostrato:

$$\langle Y(x_1)Y(x_2) \rangle = -2 \log(|x_1 - x_2| + \varepsilon), \quad (4.5.14)$$

dove abbiamo fissato $\alpha=1$.

Per quanto riguarda il primo termine dello sviluppo, si ha che:

$$\langle 1 \rangle = 1. \quad (4.5.15)$$

Invece, per quanto riguarda il secondo termine dello sviluppo, si ha che:

$$\langle e^{ik_1 \cdot Y(\theta_1)} \rangle = \varepsilon^{k_1^2}, \quad (4.5.16)$$

e quindi che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_1}{\varepsilon} \int d^{26}k_1 T(k_1) e^{ik_1 \cdot X_0(x_1)} \langle e^{ik_1 \cdot Y(x_1)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int d^{26}k_1 T(k_1) e^{ik_1 \cdot X_0(x_1)} \varepsilon^{k_1^2-1} \equiv A. \quad (4.5.17)$$

Per quanto riguarda invece il secondo termine si ha che:

$$\langle e^{ik_1 \cdot Y(x_1) + ik_2 \cdot Y(x_2)} \rangle = \varepsilon^{k_1^2 + k_2^2} (x_1 - x_2 + \varepsilon)^{2k_1 k_2}, \quad (4.5.18)$$

e quindi che:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} dx_2 \frac{1}{\varepsilon^2} \int d^{26}k_1 d^{26}k_2 e^{ik_1 \cdot X_0(x_1) + ik_2 \cdot X_0(x_2)} T(k_1) T(k_2) \langle e^{ik_1 \cdot Y(x_1) + ik_2 \cdot Y(x_2)} \rangle = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} dx_2 \int d^{26}k_1 d^{26}k_2 e^{ik_1 \cdot X_0(x_1) + ik_2 \cdot X_0(x_2)} T(k_1) T(k_2) \varepsilon^{k_1^2 + k_2^2 - 2} (x_1 - x_2 + \varepsilon)^{2k_1 k_2} \equiv B. \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

Pertanto dalle (4.5.10), (4.5.15), (4.5.117) e (4.5.19) si ottiene che:

$$\mathcal{S}_{eff} [X_c] = \mathcal{S}_0 [X_c] - \log \left(1 - A + \frac{B}{2} + \dots \right). \quad (4.5.20)$$

Ora vogliamo definire il campo tachionico rinormalizzato T_R .

Nella teoria dei campi della particella puntiforme le grandezze (masse, accoppiamenti e campi) rinormalizzate (che indichiamo con g_R) sono definite come quelle tali che l'azione effettiva espressa in funzione di esse abbia la stessa forma dell'azione classica espressa in funzione delle grandezze nude (cioè non rinormalizzate):

$$\mathcal{S}_{eff} = \mathcal{S} [g_R]. \quad (4.5.21)$$

Quindi, nel nostro caso, definiamo il campo tachionico rinormalizzato T_R come quella grandezza per la quale:

$$\mathcal{S}_{eff} = \mathcal{S} [T_R]. \quad (4.5.22)$$

Ricordando però che l'azione classica (senza cut-off) è:

$$\mathcal{S} [X_0, T] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{y>0} dx dy \eta^{ab} \partial_a X_{0\mu} \partial_b X_0^\mu + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int d^{26} k T(k) e^{ik \cdot X_0}. \quad (4.5.23)$$

dalla (4.5.22) ne segue che deve essere:

$$\mathcal{S}_{eff} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{y>0} dx dy \eta^{ab} \partial_a X_{0\mu} \partial_b X_0^\mu + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\varepsilon} \int d^{26} k T_R(k) e^{ik \cdot X_0} = \mathcal{S}_0 [X_0] + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int d^{26} k T_R(k) e^{ik \cdot X_0}. \quad (4.5.24)$$

Però conosciamo già, grazie alla (4.5.20), l'espressione che ha l'azione effettiva in termini del campo tachionico non rinormalizzato T .

Pertanto, facendo il confronto tra la (4.5.20) e la (4.5.24), ne segue che possiamo ricavare l'espressione di T_R in termini di T .

Per esempio, considerando la (4.5.20) al primo ordine, si ha che:

$$\mathcal{S}_{eff} [X_0] = \mathcal{S}_0 [X_0] - \log(1 - A) \simeq \mathcal{S}_0 [X_0] + A = \mathcal{S}_0 [X_0] + \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int d^{26} k_1 T(k_1) e^{ik_1 \cdot X_0(x_1)} \varepsilon^{k_1^2 - 1}, \quad (4.5.25)$$

avendo usato lo sviluppo in serie di Taylor del logaritmo:

$$\log(1 - x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \simeq -x \quad \text{per} \quad x \ll 1, \quad (4.5.26)$$

cioè avendo trascurato i termini non-locali nell'azione effettiva, cioè i termini che non possono essere scritti come un singolo integrale sull'asse x .

Quindi si vede che la (4.5.25) assume la forma (4.5.24) qualora si ponga:

$$T_R(k) \equiv T(k) \varepsilon^{k^2 - 1}. \quad (4.5.27)$$

Infatti in tal caso la (4.5.25) diventa:

$$\mathcal{S}_{eff} [X_0] = \mathcal{S}_0 [X_0] + \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int d^{26} k_1 T_R(k_1) e^{ik_1 \cdot X_0(x_1)}, \quad (4.5.28)$$

e quindi abbiamo ottenuto proprio la (4.5.24).
 Consideriamo adesso l'approssimazione al secondo ordine.
 Se X_0 varia lentamente, possiamo espandere:

$$X_0(x_2) = X_0(x_1) + (x_2 - x_1)X_0'(x_1) + \dots \quad (4.5.29)$$

Siccome siamo interessati alla rinormalizzazione di accoppiamenti della forma $\exp(ik.X_0(x))$, cioè siccome siamo interessati al campo tachionico rinormalizzato $T_R(k)$, possiamo trascurare i termini che contengono le derivate di X_0 .

Quindi per i nostri scopi possiamo sostituire $\exp(ik_1.X_0(x_1)+ik_2.X_0(x_2))$ con $\exp(i(k_1+k_2).X_0(x_1))$.

Questo semplifica il calcolo dell'integrale (4.5.19):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} dx_2 \int d^{26}k_1 d^{26}k_2 e^{ik_1.X_0(x_1)+ik_2.X_0(x_2)} T(k_1)T(k_2) \varepsilon^{k_1^2+k_2^2-2} (x_1 - x_2 + \varepsilon)^{2k_1k_2} \simeq \\ & \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{x_1} dx_2 \int d^{26}k_1 d^{26}k_2 e^{i(k_1+k_2).X_0(x_2)} T(k_1)T(k_2) \varepsilon^{k_1^2+k_2^2-2} (x_1 - x_2 + \varepsilon)^{2k_1k_2} = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int d^{26}k_1 d^{26}k_2 e^{i(k_1+k_2).X_0(x_2)} T(k_1)T(k_2) \varepsilon^{k_1^2+k_2^2-2} \int_{-\infty}^{x_1} dx_2 (x_1 - x_2 + \varepsilon)^{2k_1k_2} = \\ & = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int d^{26}k_1 d^{26}k_2 e^{i(k_1+k_2).X_0(x_2)} T(k_1)T(k_2) \varepsilon^{(k_1+k_2)^2-1} \frac{1}{2k_1.k_2+1}. \end{aligned} \quad (4.5.30)$$

Possiamo scrivere l'integrale (4.5.30) anche nel seguente modo:

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int d^{26}k d^{26}k_1 d^{26}k_2 T(k_1)T(k_2) e^{ik.X_0(x_1)} \varepsilon^{(k_1+k_2)^2-1} \delta^{(26)}(k_1+k_2-k) \frac{1}{2k_1.k_2+1}. \quad (4.5.31)$$

Da qui si vede che ponendo:

$$T_R(k) = \varepsilon^{k^2-1} \int d^{26}k_1 d^{26}k_2 \frac{T(k_1)T(k_2)}{2k_1.k_2+1} \delta^{(26)}(k_1+k_2-k), \quad (4.5.32)$$

l'integrale (4.5.31) diventa:

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int d^{26}k T_R(k) e^{ik.X_0(x_1)}, \quad (4.5.33)$$

ovvero assume la forma dell'interazione nell'azione di world-sheet classica.
 Questo è proprio quello che si vuole, in base alla definizione di T_R data in precedenza.
 Quindi, ricordando la (4.5.27), la formula completa per $T_R(k)$ al secondo ordine è:

$$T_R(k) = \varepsilon^{k^2-1} \left(T(k) + \int d^{26}k_1 d^{26}k_2 \frac{T(k_1)T(k_2)}{2k_1.k_2+1} \delta^{(26)}(k_1+k_2-k) \right). \quad (4.5.34)$$

$T_{\mathbb{R}}(k)$ può essere ricavato anche in un altro modo, come spiegato in [27].

Ricordiamo che:

$$Z[0] = \int [dX^\mu] e^{-S[X]} \quad (4.5.35)$$

e che dopo il mapping conforme (4.2.11) l'azione di world-sheet diventa:

$$\mathcal{S}[X] = \frac{1}{4\pi} \int d\sigma d\tau \partial_a X(\sigma, \tau) \cdot \partial_a X(\sigma, \tau) + \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} T(X(\theta)). \quad (4.5.36)$$

Cominciamo con l'osservazione che il bulk (cioè il termine libero) può essere integrato fuori dalla (4.5.35) per dare una teoria di campo non-locale effettiva che vive sul bordo.

Per fare questo scriviamo il campo nel bulk come:

$$X = X_{cl} + X_{qu}, \quad (4.5.37)$$

dove:

$$\partial^2 X_{cl} = 0 \quad (4.5.38)$$

ed X_{cl} si avvicina al valore di bordo (per ora) fissato di X :

$$X_{cl} \rightarrow X_{bdry} \quad \text{ed} \quad X_{qu} \rightarrow 0. \quad (4.5.39)$$

Allora nel bulk la misura funzionale è $dX = dX_{qu}$ ed inoltre:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \partial X_{qu} \cdot \partial X_{qu} + \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} X^\mu(\theta) |i\partial_\theta| X^\mu(\theta) + \frac{1}{\varepsilon} T(X(\theta)) \right\}, \quad (4.5.40)$$

dove abbiamo ommesso l'indice cl nell'ultimo integrale.

Allora l'integrazione di X_{qu} produce una costante moltiplicativa nella funzione di partizione, che indichiamo con K :

$$Z[0] = K \int [dX_\mu] e^{-\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \left(\frac{1}{2} X_\mu(\theta) |i\partial_\theta| X^\mu(\theta) + \frac{1}{\varepsilon} T(X(\theta)) \right)}. \quad (4.5.41)$$

Per poter usare questo path-integral come funzionale generatore per i correlatori dei campi X^μ sul bordo del disco, aggiungiamo una sorgente $J^\mu(\theta)$:

$$Z[J] = K \int [dX_\mu] e^{-\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \left(\frac{1}{2} X_\mu(\theta) |i\partial_\theta| X^\mu(\theta) + \frac{1}{\varepsilon} T(X(\theta)) - J \cdot X(\theta) \right)} \quad (4.5.42)$$

In particolare supponiamo che la sorgente sia solamente per gli zero modi:

$$Z[k] = K \int [dX_\mu] e^{-\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \left(\frac{1}{2} X_\mu(\theta) |i\partial_\theta| X^\mu(\theta) + \frac{1}{\varepsilon} T(X(\theta)) \right) - ik \cdot \hat{X}}, \quad (4.5.43)$$

dove in questo caso $J^\mu(\theta) = -ik^\mu = \text{costante} \forall \theta$, mentre gli zero modi sono definiti come:

$$\hat{X}^\mu \equiv \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} X^\mu(\theta). \quad (4.5.44)$$

Come si vede, grazie all'introduzione della sorgente per gli zero modi, siamo passati dalla $Z[0]$ (4.5.41) alla $Z[k]$ (4.5.43).

Sviluppiamo ora in serie di Taylor l'esponenziale dell'interazione nella (4.5.43):

$$\begin{aligned} e^{-\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} T(X(\theta))} &= 1 - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} T(X(\theta_1)) + \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} T(X(\theta_1)) \right] \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} T(X(\theta_2)) \right] + \dots = \\ &= 1 - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \int dk_1 \frac{1}{\varepsilon} T(k_1) e^{ik_1 \cdot X(\theta_1)} + \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \int dk_1 \frac{1}{\varepsilon} T(k_1) e^{ik_1 \cdot X(\theta_1)} \right] \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi} \int dk_2 \frac{1}{\varepsilon} T(k_2) e^{ik_2 \cdot X(\theta_2)} \right] + \dots, \end{aligned}$$

(4.5.45)

dove al secondo passaggio abbiamo usato la trasformata di Fourier sui singoli termini dello sviluppo.

Pertanto la (4.5.43) diventa:

$$\begin{aligned} Z[k] &= K \int [dX_\mu] e^{-ik \cdot \hat{X} - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \left(\frac{1}{2} X_\mu(\theta) |i\partial_\theta| X^\mu(\theta) \right)} - K \int [dX_\mu] e^{-ik \cdot \hat{X} - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \left(\frac{1}{2} X_\mu(\theta) |i\partial_\theta| X^\mu(\theta) \right)} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \int dk_1 \frac{1}{\varepsilon} T(k_1) e^{ik_1 \cdot X(\theta_1)} + \\ &+ \frac{K}{2} \int [dX_\mu] e^{-ik \cdot \hat{X} - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \left(\frac{1}{2} X_\mu(\theta) |i\partial_\theta| X^\mu(\theta) \right)} \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \int dk_1 \frac{1}{\varepsilon} T(k_1) e^{ik_1 \cdot X(\theta_1)} \right] \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi} \int dk_2 \frac{1}{\varepsilon} T(k_2) e^{ik_2 \cdot X(\theta_2)} \right] + \dots \\ &= K \langle e^{-ik \cdot \hat{X}} \rangle - K \int dk_1 \frac{1}{\varepsilon} T(k_1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \langle e^{-ik \cdot \hat{X} + ik_1 \cdot X(\theta_1)} \rangle + \\ &+ \frac{K}{2} \int dk_1 dk_2 \frac{1}{\varepsilon^2} T(k_1) T(k_2) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi} \langle e^{-ik \cdot \hat{X} + ik_1 \cdot X(\theta_1) + ik_2 \cdot X(\theta_2)} \rangle + \dots \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} Z^{(n)}[k]. \end{aligned}$$

(4.5.46)

dove:

$$\langle \dots \rangle \equiv \int [dX_\mu] (\dots) e^{-\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \left(\frac{1}{2} X_\mu(\theta) |i\partial_\theta| X^\mu(\theta) \right)}. \quad (4.5.47)$$

Ora, per calcolare i termini $Z^{(n)}[k]$, bisogna effettuare tutte le contrazioni col teorema di Wick in termini del propagatore sul bordo:

$$\langle X^\mu(z_1, \bar{z}_1) X^\nu(z_2, \bar{z}_2) \rangle = -\eta^{\mu\nu} \log |z_1 - z_2|^2. \quad (4.5.48)$$

Però sappiamo che sul bordo si ha che $|z|=1$, e quindi che $z=\exp(i\theta)$. Pertanto ne segue che:

$$\langle X^\mu(\theta_1) X^\nu(\theta_2) \rangle = -\eta^{\mu\nu} \log |e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|^2 = -\eta^{\mu\nu} \ln [2 - 2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (4.5.49)$$

Oppure possiamo ricavare il propagatore attraverso l'operatore cinetico della teoria, come di seguito mostrato.

Prima abbiamo visto che il bulk può essere integrato fuori dalla (4.5.35) per dare una teoria di campo non-locale effettiva che vive sul bordo, la cui azione è data da:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \left(\frac{1}{2} X_\mu(\theta) |i\partial_\theta| X^\mu(\theta) + \frac{1}{\varepsilon} T(X(\theta)) \right). \quad (4.5.50)$$

L'operatore cinetico di questa azione è pertanto:

$$K_{bndy}(\theta - \theta') = |i\partial_\theta| \delta(\theta - \theta'). \quad (4.5.51)$$

Siccome facciamo variare θ sul bordo di un disco, ne segue che $\delta(\theta)$ è periodica, poichè i punti 0 e 2π sono identificati.

Pertanto dovremo usare lo sviluppo in serie di Fourier, anzichè la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} F[K_{bndy}(\theta)] &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d\theta K_{bndy}(\theta) e^{-im\omega_0\theta} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d\theta [|i\partial_\theta| \delta(\theta - \theta')] e^{-im\omega_0\theta} = \\ &= -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d\theta \delta(\theta - \theta') (|i\partial_\theta| e^{-im\omega_0\theta}) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d\theta \delta(\theta - \theta') |n\omega_0| = \frac{1}{T} |n\omega_0|, \end{aligned} \quad (4.5.52)$$

dove ω_0 rappresenta la frequenza della fondamentale, e vale:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (4.5.53)$$

con T che rappresenta il periodo della funzione.

Nel nostro caso il periodo è rappresentato dalla lunghezza del bordo del disco.
 Però il disco ha raggio 1, e quindi la sua circonferenza sarà lunga 2π .
 Ne segue che $\omega_0=1$.

Essendo poi:

$$\int d\theta G(\theta, \theta') K_{bdy}(\theta, \theta'') = \delta(\theta' - \theta''), \quad (4.5.54)$$

cioè essendo G (cioè il propagatore) l'inverso dell'operatore cinetico, ne segue che:

$$F[G(\theta)] = \frac{1}{F[K_{bdy}(\theta)]} = \frac{2\pi}{|n|}, \quad \forall n \neq 0. \quad (4.5.55)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} G(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} F[G(\theta)] e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{2\pi}{|n|} e^{in\theta} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{|n|} e^{in\theta} = \\ &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{|n|} (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{|n|} \cos(n\theta) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos(n\theta), \end{aligned} \quad (4.5.56)$$

dove abbiamo usato il fatto che la funzione $1/|n|$ è pari al variare di n e quindi alla serie di Fourier contribuiscono solamente i termini di tipo coseno.

Questa serie è ben definita $\forall \theta \neq 0$ e si dimostra che converge alla funzione:

$$-\ln[2(1 - \cos\theta)], \quad \forall \theta \neq 0, \quad (4.5.57)$$

il che torna con il valore prima trovato con la (4.5.49).

Invece, per $\theta=0$, la serie diverge e quindi deve essere regolarizzata.

Per regolarizzare questa serie nel punto $\theta=0$ facciamo:

$$G(\theta) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\varepsilon n} \frac{\cos(n\theta)}{n}, \quad (4.5.58)$$

con ε infinitesimo, in modo che per $\theta \neq 0$ questo sviluppo in serie sia ancora uguale a $-\ln[2(1 - \cos\theta)]$.

Invece, per $\theta=0$, questo sviluppo in serie dà:

$$\begin{aligned}
G(0) &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\varepsilon n} \frac{\cos 0}{n} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\varepsilon n} \frac{1}{n} = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int e^{-\varepsilon n} d\varepsilon = -2 \int \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\varepsilon n} \right) d\varepsilon = -2 \int \left(\frac{1}{1-e^{-\varepsilon}} - 1 \right) d\varepsilon = \\
&= -2 \int \left(\frac{e^\varepsilon}{e^\varepsilon - 1} - 1 \right) d\varepsilon = -2 \left(\ln |e^\varepsilon - 1| - \varepsilon \right) = -2 \left[\ln |(1+\varepsilon) - 1| - \varepsilon \right] = -2 (\ln \varepsilon - \varepsilon) = -2 \ln \varepsilon,
\end{aligned}$$

(4.5.59)

avendo usato il fatto che ε è piccolo.

In generale si dimostra che:

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\varepsilon n} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln(1 - 2e^{-\varepsilon} \cos\theta + e^{-2\varepsilon}) = 4e^{-\varepsilon} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (e^{-\varepsilon} - 1)^2. \quad (4.5.60)$$

Quindi ora conosciamo l'espressione del propagatore e quindi possiamo effettuare le contrazioni nel path-integral (4.5.47).

Nel propagatore possiamo inglobare anche la soluzione dell'omogenea, perchè tanto questa non dà contributo.

Pertanto possiamo scrivere che:

$$G(\theta) = \begin{cases} -\log \left[c \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] & \text{per } \theta \neq 0 \\ -2 \log \varepsilon & \text{per } \theta = 0 \end{cases} \quad (4.5.61)$$

dove c è una costante che rappresenta appunto la soluzione dell'omogenea e riflette l'ambiguità nel sottrarre i termini divergenti.

Il suo valore deve essere fissato da qualche prescrizione di rinormalizzazione.

Quindi ora si può dimostrare che:

$$\langle e^{-ik \cdot \hat{X}} \rangle = \delta^{(26)}(k), \quad (4.5.62)$$

da cui segue che:

$$Z^{(0)}[k] = K \langle e^{-ik \cdot \hat{X}} \rangle = K \delta^{(26)}(k). \quad (4.5.63)$$

Inoltre si dimostra che:

$$\begin{aligned}
\langle e^{-ik \cdot \hat{X} + ik_1 \cdot X(0_1)} \rangle &= \left(\int d\hat{X}_\mu e^{i(k_1 - k) \cdot \hat{X}(0_1)} \right) e^{-\frac{k_1^2}{2} G(0)} = (2\pi)^{26} \delta^{(26)}(k - k_1) e^{-\frac{k_1^2}{2} G(0)} = \\
&= (2\pi)^{26} \delta^{(26)}(k - k_1) e^{-\frac{k_1^2}{2} (-2 \ln \varepsilon)} = (2\pi)^{26} \delta^{(26)}(k - k_1) \varepsilon^{k_1^2}, \quad (4.5.64)
\end{aligned}$$

da cui segue che:

$$\begin{aligned}
Z^{(1)}[k] &= -K \int dk_1 \frac{1}{\varepsilon} T(k_1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \left\langle e^{-ik \cdot \hat{X} + ik_1 \cdot X(\theta_1)} \right\rangle = -K \int dk_1 \frac{1}{\varepsilon} T(k_1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} (2\pi)^{26} \delta^{(26)}(k - k_1) \varepsilon^{k_1^2} = \\
&= -(2\pi)^{26} KT(k) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \varepsilon^{k^2-1} = -(2\pi)^{26} KT(k) \varepsilon^{k^2-1}.
\end{aligned}$$

(4.5.65)

Si dimostra anche che:

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{-ik \cdot \hat{X} + ik_1 \cdot X(\theta_1) + ik_2 \cdot X(\theta_2)} \right\rangle &= (2\pi)^{26} \delta^{(26)}(k - k_1 - k_2) e^{-\frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2)G(0) - k_1 k_2 G(\theta_1 - \theta_2)} = \\
&= (2\pi)^{26} \delta^{(26)}(k - k_1 - k_2) e^{(k_1^2 + k_2^2) \ln \varepsilon + k_1 k_2 \ln \left[c \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right]} = (2\pi)^{26} \delta^{(26)}(k - k_1 - k_2) \varepsilon^{k_1^2 + k_2^2} \left[c \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right]^{k_1 k_2},
\end{aligned}$$

(4.5.66)

da cui segue che:

$$\begin{aligned}
Z^{(2)}[k] &= \frac{K}{2} \int dk_1 dk_2 \frac{1}{\varepsilon^2} T(k_1) T(k_2) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi} \left\langle e^{-ik \cdot \hat{X} + ik_1 \cdot X(\theta_1) + ik_2 \cdot X(\theta_2)} \right\rangle = \\
&= \frac{K}{2} \int dk_1 dk_2 \frac{1}{\varepsilon^2} T(k_1) T(k_2) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi} (2\pi)^{26} \delta^{(26)}(k - k_1 - k_2) \varepsilon^{k_1^2 + k_2^2} \left[c \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right] = \\
&= (2\pi)^{26} \frac{K}{2} \int dk_1 dk_2 T(k_1) T(k_2) \delta^{(26)}(k - k_1 - k_2) \varepsilon^{k_1^2 + k_2^2 - 2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi} \left[c \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right].
\end{aligned}$$

(4.5.67)

Scegliendo in particolare $c=4$, si ottiene che:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi} \left[4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right] = \frac{\Gamma(1 + 2k_1 k_2)}{\Gamma^2(1 + k_1 k_2)} \quad (4.5.68)$$

e quindi:

$$Z^{(2)}[k] = (2\pi)^{26} \frac{K}{2} \int dk_1 dk_2 T(k_1) T(k_2) \delta^{(26)}(k - k_1 - k_2) \varepsilon^{k_1^2 + k_2^2 - 2} \frac{\Gamma(1 + 2k_1 k_2)}{\Gamma^2(1 + k_1 k_2)}. \quad (4.5.69)$$

Si vede quindi che $\operatorname{Tr}(k)$ può essere calcolato anche nel seguente modo:

$$T_R(k) = -\frac{Z^{(1)}[k]}{K} \quad (4.5.70)$$

al primo ordine, e:

$$T_R(k) = -\frac{Z^{(1)}[k] + Z^{(2)}[k]}{K} \quad (4.5.71)$$

al secondo ordine.

Infatti, inserendo la (4.5.65) nella (4.5.70) e la somma delle (4.5.65) e (4.5.69) nella (4.5.71), si riottengono esattamente le (4.5.27) e (4.5.34) ricavate con l'altro metodo.

Cosa analoga vale al terzo ordine, che è l'ultimo ordine che si riesce a calcolare in modo esatto.

Comunque in generale la formula è:

$$T_R(k) = -\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} Z^{(n)}[k]}{K} = -\frac{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} Z^{(n)}[k]\right) - Z^{(0)}[k]}{K} = \frac{K\delta^{(26)}(k) - Z[k]}{K}. \quad (4.5.72)$$

Nel caso particolare in cui T vari lentamente al variare di X^μ (cioè nel caso di piccoli impulsi k), si dimostra [27] che:

$$Z^{(n)}[k] = K \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{i=1}^n \int dk_i \delta^{(26)}\left(k - \sum_{i=1}^n k_i\right) \varepsilon^{-n} \prod_{i=1}^n T(k_i) \left(1 + \sum_{i=1}^n k_i^2 \log \varepsilon + \sum_{i<j}^n k_i k_j \log \frac{c}{4}\right) \quad \forall n, \quad (4.5.73)$$

la cui antitrasformata di Fourier per $c=4$ è:

$$\begin{aligned} Z^{(n)}[X] &= \int dk e^{ik \cdot X} K \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{i=1}^n \int dk_i \delta^{(26)}\left(k - \sum_{i=1}^n k_i\right) \varepsilon^{-n} \prod_{i=1}^n T(k_i) \left(1 + \sum_{i=1}^n k_i^2 \log \varepsilon + \sum_{i<j}^n k_i k_j \log \frac{c}{4}\right) = \\ &= K \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\varepsilon^n} [T(X) - (\log \varepsilon) \Delta T(X)]^n, \end{aligned} \quad (4.5.74)$$

(4.5.74)

dove $T(X)$ rappresenta l'antitrasformata di Fourier di $T(k)$, e:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{26} \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} \quad (4.5.75)$$

(qui per semplicità abbiamo considerato come target space uno spaziotempo 26-dimensionale piatto euclideo, e quindi ora con X^{26} intendiamo la coordinata temporale X^0).

Pertanto:

$$Z[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} Z^{(n)}[X] = K \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\varepsilon^n} [T(X) - (\log \varepsilon) \Delta T(X)]^n = K e^{\frac{1}{\varepsilon} [T(X) - (\log \varepsilon) \Delta T(X)]}, \quad (4.5.76)$$

e quindi la trasformata di Fourier della (4.5.72) diventa:

$$T_R(X) = \frac{K - Z[X]}{K} = 1 - e^{\frac{1}{\varepsilon} [T(X) - (\log \varepsilon) \Delta T(X)]}. \quad (4.5.77)$$

Inoltre dalla (4.5.72) si ottiene che:

$$Z[k=0] = K \left(\delta^{(26)}(k=0) - T_R(k=0) \right) = K \left[\int d^{26} X (1 - T_R(X)) e^{ik \cdot X} \right]_{k=0} = K \int d^{26} X (1 - T_R(X)), \quad (4.5.78)$$

Invece dalla (4.5.77) si ottiene che:

$$\beta(X) = \frac{\partial T_R(X)}{\partial(-\log \varepsilon)} = -\varepsilon \frac{\partial T_R(X)}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{T(X)}{\varepsilon}} \left\{ T(X) + \Delta T(X) \left[1 - \left(1 - \frac{T(X)}{\varepsilon} \right) \log \varepsilon \right] \right\}. \quad (4.5.79)$$

Siccome vogliamo esprimere la funzione β in termini del campo T_R , dobbiamo invertire la relazione (4.5.77).

Considerando solamente gli ordini dominanti nelle derivate, la relazione inversa è:

$$T(X) = -\varepsilon \left\{ [1 + (\log \varepsilon) \Delta] \log(1 - T_R(X)) \right\}, \quad (4.5.80)$$

che sostituita nella (4.5.79) dà:

$$\beta^T(X) = (1 - T_R(X)) \left[-\log(1 - T_R(X)) - \Delta \log(1 - T_R(X)) \right]. \quad (4.5.81)$$

$\beta^T(X)=0$ è l'equazione del moto del tachione nel caso in cui il campo tachionico vari lentamente. È interessante determinare la funzione β anche nel caso in cui la costante c che appare nella (4.5.61) sia lasciata indeterminata.

$T_R(k)$ può essere facilmente ottenuto come prima dalla (4.5.73) senza fissare $c=4$.

Calcolando l'antitrasformata di Fourier e derivando rispetto a $-\log \varepsilon$, la funzione β espressa in termini di $T_R(k)$ diventa:

$$\beta^T(X) = (1-T_R) \left[-\log(1-T_R) + \frac{\Delta T_R}{1-T_R} + \left(1 + \frac{1}{2} \log \frac{c}{4}\right) \frac{\partial^\mu T_R \partial_\mu T_R}{(1-T_R)^2} \right]. \quad (4.5.82)$$

Ora calcoliamo l'azione di Witten-Shatashvili.
Inserendo la (4.5.78) nella (4.4.8) si ottiene che:

$$\begin{aligned} S &= \left(1 - \int d^{26} X' \beta^T(X') \frac{\delta}{\delta T_R(X')}\right) Z[T_R] = \left(1 - \int d^{26} X' \beta^T(X') \frac{\delta}{\delta T_R(X')}\right) \left(K \int d^{26} X [1-T_R(X)]\right) = \\ &= K \int d^{26} X [1-T_R(X)] - K \int d^{26} X' \beta^T(X') \frac{\delta}{\delta T_R(X')} \int d^{26} X [1-T_R(X)] = \\ &= K \int d^{26} X [1-T_R(X)] - K \int d^{26} X' \beta^T(X') \int d^{26} X \left[-\frac{\delta T_R(X)}{\delta T_R(X')} \right] = \\ &= K \int d^{26} X [1-T_R(X)] + K \int d^{26} X' \beta^T(X') \int d^{26} X \delta^{(26)}(X-X') = \\ &= K \int d^{26} X [1-T_R(X) + \beta^T(X)] \end{aligned}$$

(4.5.83)

Inserendo la (4.5.82) nella (4.5.83), si ottiene che:

$$S = K \int dX (1-T_R) \left[1 - \log(1-T_R) + \left(1 + \frac{1}{2} \log \frac{c}{4}\right) \frac{\partial^\mu T_R \partial_\mu T_R}{(1-T_R)^2} \right], \quad (4.5.84)$$

dove $-\infty \leq T_R \leq 1$.

Con la ridefinizione di campo:

$$1-T_R = e^{-\tilde{T}} \quad (4.5.85)$$

la (4.5.82) diventa:

$$\beta^{\tilde{T}} = \tilde{T} + \Delta \tilde{T} + \frac{1}{2} \log \frac{c}{4} \partial^\mu \tilde{T} \partial_\mu \tilde{T}, \quad (4.5.86)$$

mentre la (4.5.84) diventa:

$$S = K \int d^{26} X e^{-\tilde{T}} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \log \frac{c}{4}\right) \partial^\mu \tilde{T} \partial_\mu \tilde{T} + 1 + \tilde{T} \right]. \quad (4.5.87)$$

Abbiamo lasciato la costante c indeterminata perchè così si può vedere che scegliendo $\log(c/4) = -1$ l'equazione del moto che deriva dalla (4.5.87) coincide con l'equazione $\beta^{\tilde{T}} = 0$ con $\beta^{\tilde{T}}$ data dalla (4.5.86).

Questo è importante perchè se troviamo delle soluzioni dell'equazione $\beta^{\tilde{T}} = 0$ aventi azione finita, queste allo stesso tempo saranno soluzioni delle equazioni del gruppo di rinormalizzazione e solitoni dell'azione di spaziotempo del tachione (4.5.87).

Queste possono quindi essere interpretate come brane di dimensione inferiore.

Essendo soluzioni del gruppo di rinormalizzazione esse saranno interpretate come un background consistente con la dinamica della stringa, ed essendo dei solitoni esse descriveranno delle brane.

Le soluzioni tempo-indipendenti (cioè indipendenti da X^{26}) ad azione finita dell'equazione $\beta^{\tilde{T}} = 0$ sono del tipo:

$$\tilde{T}(X) = a + \sum_{i=1}^{25} u_i X_i^2. \quad (4.5.88)$$

Sostituendo questa funzione nell'equazione $\beta^{\tilde{T}} = 0$ si vede che essa è risolta da $u_i = 0$, oppure $u_i = 1/2$, ed $a = -2 \sum_{i=1}^n u_i = -n$, dove n (con $1 \leq n \leq 25$) è il numero di u_i non-nulli.

Pertanto la soluzione cercata è:

$$\tilde{T}(X) = -n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i^2. \quad (4.5.89)$$

Questi solitoni di codimensione n possono essere interpretati come $D(25-n)$ -brane, come mostreremo nel paragrafo 4.9 (queste sono soluzioni indipendenti dal tempo, perchè ci siamo messi in un sistema di riferimento in cui i solitoni sono a riposo. La dipendenza temporale verrà poi ereditata facendo un boost di Lorentz nella direzione in cui si propaga il solitone).

L'espressione di $Z^{(n)}$ per n generico data dalla (4.5.73) è un'approssimazione che è stata ricavata nell'ipotesi in cui il campo tachionico T vari lentamente al variare di X^μ .

Solamente $Z^{(0)}$, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$ e $Z^{(3)}$ possono essere calcolate esattamente, cioè senza far ricorso all'approssimazione di campo T lentamente variabile.

Sebbene il formalismo della background independent open string field theory sia stato sviluppato per studiare fenomeni off-shell, ovviamente quando si va on-shell (cioè per $k^2=1$) esso deve fornire tutti i risultati della teoria delle stringhe definita sul vuoto instabile, e cioè della teoria delle stringhe in prima quantizzazione.

In particolare nell'introduzione generale abbiamo detto che uno dei grandi risultati della teoria delle stringhe in prima quantizzazione è stato quello di fornire l'ampiezza di Veneziano (spiegata poi nel paragrafo 2.1).

Pertanto vogliamo che la background independent open string field theory, calcolata on-shell, dia come risultato l'ampiezza di Veneziano.

Effettivamente l'ampiezza di Veneziano è stata ricavata in [27] nel limite "isotropo" della background independent open string field theory, calcolando la funzione β corrispondente a solamente i quattro termini esatti $Z^{(0)}$, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$ e $Z^{(3)}$ del funzionale generatore.

Siccome la funzione β diverge quando calcolata on-shell, cioè siccome essa ha un polo nella condizione di mass-shell $k^2=1$, in [27] si è riusciti a ricavare l'ampiezza di Veneziano calcolando i residui dei poli della funzione β , ma solo nel limite "isotropo", cioè nel limite in cui gli impulsi dei tachioni tendono alla condizione di mass-shell nello stesso modo, cioè con la stessa "velocità" (per esempio, se un tachione tende alla condizione di mass-shell come $k^2=1+\varepsilon$ mentre un altro come $k^2=1+\varepsilon^2$, allora il limite non è isotropo e l'ampiezza di Veneziano non viene ottenuta. Anche facendo tendere un impulso alla condizione di mass-shell tenendo gli altri fissi, e poi facendo il limite di mass-shell per i rimanenti impulsi di questo risultato non porta all'ampiezza di Veneziano).

4.6 GIUSTIFICAZIONE DELL'ANNULLAMENTO DEI MODI DI STRINGA ECCITATA

Finora ci siamo concentrati sulla fisica del tachione.

È interessante, e per alcuni scopi necessario, generalizzare la discussione per includere le interazioni con le stringhe di background eccitate, e cioè le interazioni con i campi $A_\mu, B_{\mu\nu} \dots$

Ci si può allora domandare: perchè abbiamo studiato la condensazione tachionica senza tenere conto di questi modi della stringa?

Per rispondere a questa domanda posta, cominciamo con il ricordare che la funzione β che compare nella formula (4.4.8) dell'azione di Witten-Shatashvili è in generale una funzione non-lineare degli accoppiamenti t^i , e che le parti non lineari della funzione β non possono essere rimosse attraverso una ridefinizione di coordinate nello spazio degli accoppiamenti quando la parte lineare delle β^i soddisfa la condizione di mass-shell.

Comunque, quando la condizione di mass-shell non è verificata, esiste una possibile scelta delle coordinate nello spazio dei campi di stringa per la quale le funzioni β sono lineari.

Quindi questa scelta può sempre essere effettuata in tutti quei processi per i quali la condizione di mass-shell non è verificata.

Siccome il processo di condensazione tachionica descrive lo spostamento del tachione verso lo stato di vuoto stabile, che è uno stato off-shell, ne segue che la condensazione tachionica è uno di quei processi per i quali la funzione β può essere considerata lineare.

Ora consideriamo l'interazione \mathcal{V} generica (4.3.1), nella quale $T(X)$ è dato dalla soluzione (4.5.88), cioè consideriamo:

$$\mathcal{V} = a + \sum_{i=1}^{26} u_i X_i^2 + A_\mu(X) \partial_\theta X^\mu + B_{\mu\nu}(X) \partial_\theta X^\mu \partial_\theta X^\nu + \dots \quad (4.6.1)$$

Dal confronto con la (4.3.4) ne segue che:

$$\begin{aligned} t^a &= a, & t^{u_i} &= u_i, \\ \mathcal{V}_a &= 1, & \mathcal{V}_{u_i} &= X_i^2, \\ \sum_j t^j \mathcal{V}_j &= A_\mu(X) \partial_\theta X^\mu + B_{\mu\nu}(X) \partial_\theta X^\mu \partial_\theta X^\nu + \dots \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Nel caso in cui la funzione β sia lineare, si ottiene che:

$$\{Q_B, cV\} = \sum_i t^i \{Q_B, cV_i\} = \sum_i t^i (1 - \Delta_i) c \partial c V_i = \sum_i \beta^i c \partial c V_i = \beta^a c \partial c + \sum_{i=1}^{26} \beta^{u_i} c \partial c X_i^2 + \sum_j \beta^j c \partial c V_j,$$

(4.6.3)

dove al primo passaggio abbiamo usato la (4.3.4), al secondo la (4.4.1), al terzo la (4.4.11) (e cioè il fatto che la funzione β sia lineare nel nostro caso, dato che stiamo studiando il processo di condensazione tachionica), mentre al quarto passaggio abbiamo usato il fatto che nell'interazione generica (4.6.1) gli accoppiamenti sono a, u_i ed i rimanenti t_j , come si vede dalla (4.6.2).

Inoltre osserviamo che, nel caso in cui le interazioni $A_\mu, B_{\mu\nu} \dots$ non siano considerate (che è appunto quanto abbiamo fatto nella trattazione precedente), cioè nel caso in cui i vari t_j siano posti uguali a zero in un punto iniziale ($x=0$, dove x rappresenta la scala di distanza introdotta con la (4.4.6)), si ottiene che:

$$\{Q_B, cV(X)\} = \left\{ Q_B, c \left(a + \sum_{i=1}^{26} u_i X_i^2 \right) \right\} = a \{Q_B, c\} + \sum_{i=1}^{26} u_i \{Q_B, cX_i^2\} = \left(a + 2\alpha' \sum_{i=1}^{26} u_i \right) c \partial c + c \partial c \sum_{i=1}^{26} u_i X_i^2,$$

(4.6.4)

dove al terzo passaggio abbiamo usato le seguenti formule:

$$T^m = -\frac{1}{4\alpha'} \sum_j \partial X_j \partial X_j$$

$$X_i(z) X_j(w) \sim -2\alpha' \eta_{ij} \log(z-w) \quad (4.6.5)$$

$$Q_B = \oint \frac{dz}{2\pi i} (cT^m + bc\partial c(z))$$

Quindi, nel caso in cui le interazioni $A_\mu, B_{\mu\nu} \dots$ non siano considerate, dal confronto tra la (4.6.3) e la (4.6.4) ne segue che:

$$\beta^a = a + 2\alpha' \sum_{i=1}^{26} u_i, \quad \beta^{u_i} = u_i, \quad \beta^j = 0. \quad (4.6.6)$$

Essendo $\beta^j=0$, e ricordando la (4.4.6), ne segue che $t_j(x)=\text{costante} \forall x$.

Però essendo $t_j(0)=0$, ne segue che sarà $t_j(x)=0 \forall x$, e cioè non vengono prodotti nuovi accoppiamenti dal flusso del gruppo di normalizzazione, e quindi in particolare nemmeno accoppiamenti del tipo $TA_\mu, TB_{\mu\nu}, \dots$

Pertanto, non essendo prodotti accoppiamenti del tipo $TA_\mu, TB_{\mu\nu}, \dots$, ne segue che i campi $A_\mu, B_{\mu\nu}, \dots$ non danno contributo, **nella riparametrizzazione degli accoppiamenti scelta (cioè quella che linearizza la funzione β)**, nel calcolo dell'azione di spaziotempo del tachione e quindi del suo potenziale.

Però la dimostrazione del perchè sia possibile non considerare i campi $A_\mu, B_{\mu\nu}, \dots$ non è ancora completa.

Dobbiamo infatti ancora vedere se possiamo consistentemente fissare a zero i campi $A_\mu, B_{\mu\nu}, \dots$ senza contraddire le equazioni del moto.

A tal fine cominciamo con l'espandere l'azione di spaziotempo negli accoppiamenti:

$$S(a, u, \lambda^i) = S^0(a, u) + S_i^1(a, u)\lambda^i + S_{ij}^2(a, u)\lambda^i\lambda^j + \dots, \quad (4.6.7)$$

dove questa volta abbiamo denotato collettivamente con λ^i tutti gli accoppiamenti diversi da a ed u . Ora vogliamo dimostrare che $S_i^1(a, u) = 0$ (il perchè questo ci serva sarà chiarito successivamente).

Dapprima supponiamo che:

$$0 \neq S_i^1(a, u) = \left. \frac{\partial S}{\partial \lambda^i} \right|_{\lambda=0} = -\beta^j G_{ij} \Big|_{\lambda=0} \quad (4.6.8)$$

(dove al secondo passaggio abbiamo usato la (4.6.7), mentre al terzo passaggio la (4.4.7)).

La non-degenerazione della metrica G_{ij} implica che $\beta^j(a, u, \lambda^i=0) \neq 0$.

Ricordando la (4.4.6), questo significa che alcuni accoppiamenti λ^j sono stati generati di nuovo (nonostante gli avessimo fissati uguali a zero nel punto $x=0$) dal flusso del gruppo di rinormalizzazione quando accendiamo a ed u .

Però con la (4.6.6) abbiamo visto che invece doveva essere $\beta^j=0$ e che quindi gli accoppiamenti diversi da a ed u non dovevano essere generati di nuovo dal flusso del gruppo di rinormalizzazione.

Quindi concludiamo che la supposizione (4.6.8) era falsa, cioè che $S_i^1(a, u) = 0$.

Guardando l'azione (4.6.7) con $S_i^1=0$, gli accoppiamenti λ^i entrano in S in modo quadratico o con potenze maggiori, così le equazioni del moto $\partial S / \partial \lambda^i = 0$ sono banalmente verificate per tutti i $\lambda^i=0$.

In altre parole, essendo $S_i^1=0$, la (4.6.7) diventa:

$$S(a, u, \lambda^i) = S^0(a, u) + S_{ij}^2(a, u)\lambda^i\lambda^j + \dots, \quad (4.6.9)$$

e quindi ne segue che:

$$\left. \frac{\partial S(a, u, \lambda^i)}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial [S_{ij}^2(a, u)\lambda^i\lambda^j]}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=0} + \dots = \left[S_{ij}^2(a, u)(\delta^{ik}\lambda^j + \lambda^i\delta^{jk}) + \dots \right] \Big|_{\lambda=0} = 0, \quad (4.6.10)$$

e quindi le equazioni del moto $\partial S / \partial \lambda^i = 0$ sono banalmente verificate per tutti i $\lambda^i=0$.

Quindi abbiamo dimostrato che è possibile consistentemente fissare a zero i campi $A_\mu, B_{\mu\nu}, \dots$ senza contraddire le equazioni del moto.

Questo conclude la dimostrazione del perchè sia possibile non considerare i campi $A_\mu, B_{\mu\nu}, \dots$ nel calcolo dell'azione di spaziotempo del tachione e del suo potenziale.

Riassumendo, abbiamo dimostrato che, solamente nel caso in cui si sia off-shell, esiste una riparametrizzazione degli accoppiamenti (quella che linearizza la funzione β) nella quale, ponendo

$t\dot{j}(0)=0$ (cioè annullando i campi nudi (cioè ad $x=0$) $A_\mu, B_{\mu\nu}, \dots$, e quindi considerando solamente l'interazione col tachione, cioè $\mathcal{V}(X)=T(X)$), le equazioni del moto sono soddisfatte.

In altre riparametrizzazioni degli accoppiamenti, i campi nudi $A_\mu, B_{\mu\nu}, \dots$ non possono essere considerati nulli, perchè questo sarebbe in contraddizione con le equazioni del moto.

Siccome i risultati non possono dipendere dalla riparametrizzazione degli accoppiamenti scelta, ne segue che è indifferente la riparametrizzazione scelta, e quindi possiamo lavorare in quella dove i campi nudi $A_\mu, B_{\mu\nu}, \dots$ possono essere considerati nulli.

Questo spiega perchè nei conti precedenti non abbiamo mai considerato i campi $A_\mu, B_{\mu\nu}, \dots$

Siccome, nella riparametrizzazione degli accoppiamenti che linearizza la funzione β , il flusso del gruppo di rinormalizzazione non crea accoppiamenti del tipo $TA_\mu, TB_{\mu\nu}, \dots$, ne segue che i risultati (azione di spaziotempo del tachione, potenziale tachionico ...) non sono influenzati dai campi $A_\mu, B_{\mu\nu}, \dots$, e quindi i risultati che si ottengono considerando solamente $\mathcal{V}(X)=T(X)$ sono **esatti** nella riparametrizzazione degli accoppiamenti che linearizza la funzione β .

Questo, oltre alla indipendenza dal background, è un altro punto a favore della background independent string field theory rispetto alla cubic string field theory.

Infatti nella cubic string field theory, dato un modo di stringa eccitata, che chiamiamo schematicamente v , si ha che esso si può accoppiare al tachione come $v^2+vT^2+v^2T+v^3$.

Inoltre gli accoppiamenti della forma vT^2 sono genericamente non-nulli, e siccome si dimostra anche che v non assume un valore di aspettazione nullo durante la condensazione tachionica (e cioè off-shell), ne segue che nella cubic string field theory i modi di stringa eccitata contribuiscono ai risultati e non possono essere fissati a zero.

Per questo motivo nella cubic string field theory i campi $A_\mu, B_{\mu\nu}, \dots$ devono essere considerati nei calcoli.

Siccome però questi campi compaiono a tutti gli ordini perturbativi, ne segue che per ottenere i risultati esatti nella cubic string field theory bisogna calcolare tutti gli ordini perturbativi in questione, che sono infiniti.

Pertanto nella cubic string field theory non si possono ottenere dei risultati esatti, mentre nella background independent string field theory invece sì, come abbiamo precedentemente dimostrato.

4.7 CALCOLO DELL'AZIONE DI SPAZIOTEMPO

Come anticipato nel paragrafo 4.4, ora vogliamo dimostrare la validità della formula (4.4.8) nel caso in cui si scelga di studiare fenomeni off-shell (cioè nel caso in cui la funzione β possa essere scelta lineare) e conoscendo già le soluzioni (4.5.88) dell'equazione del moto $\beta=0$ del tachione.

Dalle soluzioni (4.5.88) ne segue che l'azione di world-sheet diventa:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \sum_{i=1}^{26} \int_D d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X_i \partial_b X_i + a + \sum_{i=1}^{26} u_i \int_{\partial D} \frac{d\theta}{2\pi} X_i^2(\theta) \equiv \sum_{i=1}^{26} \mathcal{S}_1^i + a, \quad (4.7.1)$$

dove D e g rappresentano rispettivamente il world-sheet del disco e la metrica piatta euclidea su di esso.

E, per semplicità, consideriamo euclideo anche lo spaziotempo.

Da questa azione derivano le seguenti condizioni al contorno:

$$n^\alpha \partial_\alpha X_i + 2\alpha' u_i X_i = 0 \quad \text{su} \quad \partial\Sigma, \quad (4.7.2)$$

dove n^α è un vettore unitario normale al bordo del disco.

Allora è chiaro che X_i obbedisce a delle condizioni al contorno di Neumann se $u_i=0$, e condizioni al contorno di Dirichlet se $u_i \rightarrow \infty$.

La funzione di Green che soddisfa queste condizioni al contorno è data in [28]:

$$G_{ij}(z, w) = \langle X_i(z) X_j(w) \rangle_{norm.} = -\frac{\alpha'}{2} \delta_{ij} \ln|z-w|^2 - \frac{\alpha'}{2} \delta_{ij} \ln|1-z\bar{w}|^2 + \frac{\delta_{ij}}{2u_i} - \delta_{ij} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\alpha'^2 u_i}{k(k+2\alpha' u_i)} \left((z\bar{w})^k + (\bar{z}w)^k \right), \quad (4.7.3)$$

con $z=\exp(i\theta)$, $w=\exp(i\theta') \in \partial\Sigma$, e $\langle \dots \rangle_{norm.}$ È la funzione di correlazione normalizzata (cioè divisa per la funzione di partizione, in modo tale che $\langle 1 \rangle_{norm.}=1$).

Di seguito ci servirà $\langle X_i^2(\theta) \rangle$, ma siccome $G(z,w)$ diverge per $z \rightarrow w$, lo definiamo attraverso il conformal normal ordering (detto anche point spitting):

$$X_i^2(\theta) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(X_i(\theta) X_i(\theta + \varepsilon) + \alpha' \ln|1 - e^{i\varepsilon}|^2 \right). \quad (4.7.4)$$

Da questa definizione, segue che:

$$\langle X_i^2(\theta) \rangle_{norm} = \frac{1}{2u_i} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\alpha'^2 u_i}{k(k+2\alpha' u_i)}. \quad (4.7.5)$$

Ora calcoliamo la funzione di partizione della materia sul disco:

$$Z^m = \int \mathcal{D} X \exp \left(-a - \mathcal{S}_0 - \sum_{i=1}^{26} u_i \int \frac{d\theta}{2\pi} X_i^2(\theta) \right). \quad (4.7.6)$$

Da questa definizione segue che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_i} \ln Z^m &= \frac{-1}{Z^m} \int \mathcal{D} X \exp \left(-\mathcal{S}_0 - \int \frac{d\theta}{2\pi} \mathcal{V}(\theta) \right) \int \frac{d\theta}{2\pi} X_i^2(\theta) = \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \langle X_i^2(\theta) \rangle_{norm} = - \frac{1}{2u_i} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\alpha'^2 u_i}{k(k+2\alpha' u_i)}. \end{aligned} \quad (4.7.7)$$

Siccome la funzione gamma di Eulero $\Gamma(z)$ soddisfa:

$$\frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = -\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z}{k(k+z)} - \gamma \quad (4.7.8)$$

(dove $\gamma \approx 0,577\dots$ è la cosiddetta *costante di Eulero-Mascheroni*), otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \ln Z^m(u_i, a) = \frac{\partial}{\partial u_i} \ln \Gamma(2\alpha' u_i) + \frac{1}{2u_i} + 2\alpha' \gamma. \quad (4.7.9)$$

Di conseguenza:

$$Z^m(u_i, a) = e^{-a} \prod_{i=1}^{26} \sqrt{2\alpha' u_i} e^{2\alpha' \gamma u_i} \Gamma(2\alpha' u_i) \equiv e^{-a} \prod_{i=1}^{26} Z_1(2\alpha' u_i). \quad (4.7.10)$$

Nell'ultimo passaggio, la normalizzazione complessiva (cioè la costante d'integrazione) è assorbita nella definizione di a .

Ora vogliamo dimostrare che l'azione di spazio-tempo può essere espressa in termini di Z^m . Dapprima calcoliamo la trasformazione BRST del campo tachionico:

$$\begin{aligned} \{Q_B, cT(X(0))\} &= \oint \frac{dz}{2\pi i} j_B(z) cT(X(0)) = \oint \frac{dz}{2\pi i} (cT^m(z) + bc\partial c(z)) cT(X(0)) = \\ &= (1-\Delta) c\partial c(0) T(X(0)), \end{aligned} \quad (4.7.11)$$

dove Δ è il peso conforme di $T(X)$.

Siccome $T(X)$ non ha derivate rispetto a θ , solo il suo momento contribuisce ad Δ , e quindi si ha che $\Delta = \alpha' p^2$.

Quindi:

$$\{Q_B, cT(X)\} = c\partial c \left(1 + \alpha' \sum_{i=1}^{26} \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} \right) T(X). \quad (4.7.12)$$

Sostituendo $T = a + \sum u_i X_i^2$, e denotando $cT = \mathcal{O}$:

$$\{Q_B, \mathcal{O}(X)\} = c\partial c \left(1 + \sum_{i=1}^{26} u_i (X_i^2 + 2\alpha') \right). \quad (4.7.13)$$

Usando questa espressione, l'equazione (4.3.6) dell'azione di spaziotempo può essere scritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
dS &= \frac{K}{2} \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \left\langle c(\theta) \left(da + \sum_i du_i X_i^2(\theta) \right) c\partial c(\theta') \left(a + \sum_i u_i (X_i^2(\theta') + 2\alpha') \right) \right\rangle_{\mathcal{V}} = \\
&= \frac{K}{2} \int \frac{d\theta d\theta'}{(2\pi)^2} \left\langle c(\theta) c\partial c(\theta') \right\rangle_{ghost} \left\langle \left(da + \sum_i du_i X_i^2(\theta) \right) \left(a + \sum_i u_i (X_i^2(\theta') + 2\alpha') \right) \right\rangle_{matter, \mathcal{V}}. \quad (4.7.14)
\end{aligned}$$

Tutti questi correlatori possono essere determinati grazie alle seguenti formule:

$$\begin{aligned}
\left\langle c(\theta) c\partial c(\theta') \right\rangle_{ghost} &= 2(\cos(\theta - \theta') - 1), \\
\int \frac{d\theta}{2\pi} \left\langle X_i^2(\theta) \right\rangle_{\mathcal{V}} &= -\frac{\partial Z^m}{\partial u_i}, \\
\int \frac{d\theta d\theta'}{(2\pi)^2} \left\langle X_i^2(\theta) X_j^2(\theta') \right\rangle_{\mathcal{V}} &= \frac{\partial^2 Z^m}{\partial u_i \partial u_j}, \quad (4.7.15) \\
\int \frac{d\theta d\theta'}{(2\pi)^2} \cos(\theta - \theta') \left\langle X_i^2(\theta) X_i^2(\theta') \right\rangle_{\mathcal{V}} &= \frac{4}{u_i}.
\end{aligned}$$

Calcoli dettagliati possono essere trovati in [28].

Con questi risultati, si ottiene che:

$$dS = Kd \left(\sum_i 2\alpha' u_i - \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + (1+a) \right) Z^m = Kd \left(-\sum_i u_i \frac{\partial}{\partial u_i} - \left(a + \sum_i 2\alpha' u_i \right) \frac{\partial}{\partial a} + 1 \right) Z^m, \quad (4.7.16)$$

e quindi che:

$$S = K \left(\sum_i 2\alpha' u_i - \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + (1+a) \right) Z^m = K \left(-\sum_i u_i \frac{\partial}{\partial u_i} - \left(a + \sum_i 2\alpha' u_i \right) \frac{\partial}{\partial a} + 1 \right) Z^m \quad (4.7.17)$$

(è da ricordare che $Z^m(u_i, a)$ dipende da a solamente attraverso un semplice fattore complessivo e^{-a}).

Ricordando poi le (4.6.2) e (4.6.6), ne segue che la (4.7.17) diventa esattamente uguale alla (4.4.8).

Quindi abbiamo dimostrato la validità della (4.4.8) in questo caso particolare.

Comunque la (4.4.8) vale anche on-shell.

Ora vogliamo riscrivere l'azione di spaziotempo (4.7.17), che è espressa in termini di a, u , in modo da esprimerla come un funzionale del campo tachionico $T(X)$.

Quello che si ottiene, qualora si tengano i termini che contengono fino a due derivate, è:

$$\tilde{S} = K \int \frac{d^{26}x}{(2\pi\alpha')^{13}} \left(\alpha' e^{-T} \partial_\mu T \partial^\mu T + (T+1) e^{-T} \right) \quad (4.7.18)$$

(la definizione di \tilde{S} l'abbiamo data nel paragrafo 3.2), che in effetti torna con la (4.5.87) per $\log(c/4) = -1$.

La ragione di ciò è la seguente: inserendo l'interazione $\mathcal{V}(X)=T(X)$ con $T(X)$ dato dalla (4.5.88), all'interno della (4.7.18) e calcolando gli integrali gaussiani, si trova che:

$$\tilde{S} = K \left[(a+1+13) e^{-a} \frac{1}{\prod_{i=1}^{26} \sqrt{2\alpha' u_i}} + 2\alpha' e^{-a} \frac{\sum_{i=1}^{26} u_i}{\prod_{i=1}^{26} \sqrt{2\alpha' u_i}} \right]. \quad (4.7.19)$$

Questo risultato si accorda con l'espressione (4.7.17) per piccoli u_i .

Un argomento che giustifica questo confronto è che $T(X)$ con grandi u_i corrisponde ad un profilo tachionico che fluttua intensamente così che questo influisca sui termini con derivate maggiori, quindi ora è sufficiente vedere il comportamento per $u \rightarrow 0$.

4.8 CALCOLO DEL FATTORE DI NORMALIZZAZIONE K

Quando calcoliamo la funzione di partizione nel background di tachione costante $T=a$, la dipendenza da a è molto semplice:

$$Z(a, t) = \int [\mathcal{D} X] e^{-S_0 - a \dots} = e^{-a} \tilde{Z}(t), \quad (4.8.1)$$

dove gli altri accoppiamenti sono collettivamente denotati con t .

Allora, per quanto visto nel paragrafo 4.7, l'azione di spaziotempo è data da:

$$S(T = a, t) = K \left(-a \frac{\partial}{\partial a} - \beta^i \frac{\partial}{\partial t^i} + 1 \right) e^{-a} \tilde{Z}(t) = K U(a) \tilde{Z}(t) - K e^{-a} \beta^i \frac{\partial}{\partial t^i} \tilde{Z}(t), \quad (4.8.2)$$

dove $U(T)$ è il potenziale del tachione $(T+1)\exp(-T)$.

Possiamo vedere che l'azione si annulla per T che tende al vuoto stabile all'infinito.

Come detto prima, la costante di normalizzazione K non è ancora stata determinata, ed ora è il tempo di fissarla.

In [29] il fattore di normalizzazione K è determinato comparando l'azione della background independent open string field theory con l'azione della cubic string field theory, ma in questa tesi seguiremo un approccio differente.

Cominciamo con il considerare l'effetto di includere dei campi di gauge nella perturbazione sul bordo.

In tal modo l'azione di world-sheet diventa:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \int \frac{d\theta}{2\pi} T + i \int \frac{d\theta}{2\pi} \partial_\theta X^\mu A_\mu(X). \quad (4.8.3)$$

Consideriamo il semplice caso $A_\mu(X) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} X^\nu$ con $F_{\mu\nu}$ costante.

Siccome le equazioni del moto (cioè le equazioni di Maxwell) $\partial_\mu F^{\mu\nu}=0$ sono sempre soddisfatte, l'invarianza conforme non è violata dalla perturbazione e quindi $\beta^{\Lambda\mu}=0$. Per $F_{\mu\nu}$ costante, la funzione di partizione $\tilde{Z}(A_\mu)$ è calcolata in [30] ed il risultato coincide con l'azione di Born-Infeld (si veda la (2.6.4)), a parte la normalizzazione:

$$\tilde{Z}(A_\mu) \propto \int d^{26}x \mathcal{L}_{BI}(A_\mu) = \int d^{26}x \sqrt{|\det(g_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu})|}. \quad (4.8.4)$$

Allora concludiamo che per T ed $F_{\mu\nu}$ costanti, l'azione di spazio-tempo (4.8.2) con $\beta^i=0$ è data da:

$$S(T, F_{\mu\nu}) = K \int \frac{d^{26}x}{(2\pi\alpha')^{13}} U(T) \mathcal{L}_{BI}(A_\mu), \quad (4.8.5)$$

dove abbiamo determinato il fattore $1/(2\pi\alpha')^{13}$ richiedendo che per $F_{\mu\nu}=0$ (cioè per $\mathcal{L}_{BI}=1$) l'azione coincida con il termine potenziale nella (4.7.18).

Sulla D25-brana, dove $U(T=0)=-1$, il fatto che l'azione sia della forma standard di Born-Infeld e che A_μ abbia la normalizzazione standard (come si vede dalla (4.8.3)) implica che il coefficiente $K/(2\pi\alpha')^{13}$ debba coincidere con la tensione τ_{25} della D25-brana:

$$\frac{K}{(2\pi\alpha')^{13}} = \tau_{25}. \quad (4.8.6)$$

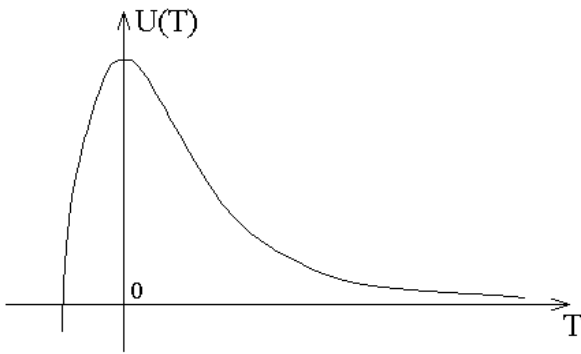
4.9 CONDENSAZIONE TACHIONICA

ANNICILAZIONE DELLE D-BRANE

Esaminiamo dapprima il campo tachionico indipendente dallo spaziotempo, cioè $T=a$. L'azione di spaziotempo (4.7.18) per $T=a$ diventa:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \tau_{25} V_{26} U(a), \\ U(T) &= (T+1)e^{-T}, \end{aligned} \quad (4.9.1)$$

dove abbiamo utilizzato la (4.8.6) e $V_{26} \equiv \int d^{26}x =$ volume 26-dimensionale. La forma del potenziale $U(T)$ del tachione è mostrata nel seguente grafico:



Siccome il potenziale $U(T)$ è esatto, possiamo dare i seguenti argomenti in modo sicuro.

$U(T)$ ha due estremi, uno in $T=0$ e l'altro a $T=+\infty$.

$T=0$ corrisponde alla D25-brana originale, e la sua densità di energia è esattamente uguale alla tensione τ_{25} della D25-brana.

Dall'altra parte, $T=+\infty$ è pensato come il 'vuoto di stringa chiusa' (che avevamo già incontrato nella sezione dei prerequisiti sulla teoria di campo di stringa), con energia nulla.

Così, utilizzando la background independent open string field theory, abbiamo dimostrato che il contributo di energia negativo dovuto al potenziale del tachione cancella esattamente la tensione della D25-brana.

Abbiamo cioè dimostrato la prima delle congetture di Sen (che avevamo enunciato nel paragrafo 3.1).

È possibile dubitare del fatto che il vuoto stabile sia all'infinito.

Ma la distanza effettiva nello spazio dei campi è finita poiché la metrica là è $\exp(-T)$ (come si può vedere dal termine cinetico nell'azione (4.7.18)), ovvero $ds^2=e^{-T}dT^2$, il che comporta che la distanza effettiva nello spazio dei campi sia $\int_0^{+\infty} e^{-T} dT = 1$.

BRANE DI DIMENSIONE MINORE (NELL'APPROSSIMAZIONE A DUE DERIVATE)

Nel paragrafo 4.5 abbiamo detto che le soluzioni (4.5.89), nel linguaggio dello spaziotempo, rappresentano solitoni di codimensione n , da identificare con $D(25-n)$ -brane: questa è la terza congettura di Sen.

Come controllo di questa affermazione, vediamo la densità di energia della soluzione.

Se sostituiamo la soluzione:

$$T(X) = -n + \frac{1}{4\alpha'} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (4.9.2)$$

nell'azione (4.7.18), il suo valore è dato da:

$$\tilde{S} = V_{26-n} \cdot e^n (4\pi\alpha')^{n/2} \tau_{25}. \quad (4.9.3)$$

Dato che l'azione del solitone (4.9.2) deve essere uguale al prodotto del suo world-volume V_{26-n} per la sua tensione, che in questo caso (cioè nel caso in cui vengano ignorati i termini delle derivate di T più alte nel calcolo dell'azione \tilde{S} , come spiegato successivamente) chiamiamo \mathcal{T}_{25-n} (il pedice di \mathcal{T} è 25-n mentre quello di V è 26-n perchè ovviamente il world-volume ha una coordinata in più, cioè quella temporale, che invece non può rientrare nella tensione del solitone), ne segue allora che dal confronto con la (4.9.3) deve essere che:

$$\mathcal{T}_{25-n} = \left(\frac{e}{\sqrt{\pi}} 2\pi \sqrt{\alpha'} \right)^n \tau_{25}. \quad (4.9.4)$$

Così il rapporto:

$$\frac{\mathcal{T}_{25-n}}{\tau_{25}} = \left(\frac{e}{\sqrt{\pi}} 2\pi \sqrt{\alpha'} \right)^n \quad (4.9.5)$$

non è in accordo con la risposta che ci si aspetta per le tensioni delle D-brane, cioè con la formula (2.6.11).

Questo però non significa che non possiamo interpretare il solitone come una D-brana.

Infatti in realtà questa discrepanza nel rapporto delle tensioni rispetto a quello delle D-brane è attribuita semplicemente all'approssimazione di ignorare i termini delle derivate più alte (infatti ricordiamo che la (4.9.5) deriva dalla (4.7.18), la quale è stata ricavata tenendo solamente i termini che contengono fino a due derivate di T).

Usando l'azione esatta, nella prossima sezione vedremo che si ottengono i risultati corretti.

Ovviamente, dato che la condensazione tachionica è un processo off-shell, non si commette errore a considerare la funzione β lineare.

Quindi in questo caso non c'è alcun bisogno di considerare la funzione β non-lineare.

Comunque è stato mostrato in [27] che la funzione β non-lineare dà un'approssimazione migliore rispetto a quella lineare nel caso in cui vengano ignorati i termini delle derivate più alte.

Infatti la funzione β non-lineare a questo livello di approssimazione dà:

$$\frac{\mathcal{T}_{25-n}}{\tau_{25}} = \left(\frac{e}{\sqrt{2\pi}} 2\pi \sqrt{\alpha'} \right)^n. \quad (4.9.6)$$

Questo risultato è migliore rispetto a quello (4.9.5) per il semplice fatto che $e/\sqrt{2\pi} \approx 1,084$ è più vicino al valore 1 (previsto secondo la prima congettura di Sen) rispetto ad $e/\sqrt{\pi} \approx 1,534$.

Comunque sia nel caso in cui venga usata una β lineare che nel caso in cui venga usata una β non-lineare, estendendo il calcolo ai termini con derivate maggiori si ottiene il risultato esatto previsto dalla prima congettura di Sen.

Nella sezione successiva però per semplicità mostriamo il calcolo nel caso della β lineare, dato che questa scelta non costituisce un errore nello studio della condensazione tachionica.

BRANE DI DIMENSIONE MINORE (TRATTAZIONE ESATTA)

Estendendo il metodo precedente ai termini con derivate maggiori, cioè espandendo l'azione (4.7.17) ad ordini più elevati in u_i e determinando i successivi termini nell'azione, non è pratico.

Se fossimo capaci di effettuare questo processo all'infinito, otterremmo in linea di principio il risultato esatto, ma questo è ovviamente impossibile.

Invece, procediamo in un altro modo.

Dagli argomenti precedenti, sappiamo che possiamo consistentemente prendere le perturbazioni al bordo $\mathcal{V}=a+\Sigma uX^2$ senza altri accoppiamenti, e che non sono prodotti nuovi accoppiamenti dal flusso del gruppo di rinormalizzazione.

Quindi tutto quello che abbiamo da fare è minimizzare l'azione esatta (4.7.17) rispetto ad a , u (questa minimizzazione rappresenta la generalizzazione, al caso in cui vengano considerati anche i termini con derivate maggiori, della procedura vista nella sezione precedente, nella quale abbiamo prima ricavato la (4.9.2) minimizzando la (4.7.18), e poi l'abbiamo usata per ricavare la (4.9.3)).

Come è chiaro dai risultati approssimati, per ottenere una soluzione di brana estesa dobbiamo concedere che alcuni degli u_i siano nulli (lo abbiamo visto subito dopo la (4.5.88)).

Ma $Z_1(z)$ (definito attraverso la (4.7.10)) è singolare per $z \rightarrow 0$, così essa deve essere regolarizzata.

Siccome il volume non-compatto è il responsabile di questa divergenza, compattifichiamo X^i come $X^i \simeq X^i + 2\pi R^i$, per $i=n+1, \dots, 26$.

Per $T=a$ (cioè per tutte le $u_i=0$) l'azione (4.7.18) è esatta e:

$$\tilde{S}(T=a) = K \int \frac{d^{26}x}{(2\pi\alpha')^{13}} (a+1) e^{-a} = K (a+1) e^{-a} \prod_{i=1}^{26} \frac{\sqrt{2\pi} R^i}{\sqrt{\alpha'}}. \quad (4.9.7)$$

Questo dovrebbe essere uguale al limite per $u \rightarrow 0$ dell'azione esatta (4.7.17):

$$S = K (a+1) e^{-a} \prod_{i=1}^{26} Z_1(2\alpha' u_i) \Big|_{u \rightarrow 0} \quad (4.9.8)$$

(dove ricordiamo che Z_1 è stato definito con la (4.7.10)).

Quindi poniamo:

$$\lim_{u \rightarrow 0} Z_1(2\alpha' u) = \lim_{u \rightarrow 0} \sqrt{2\alpha' u} e^{2\alpha' \gamma u} \Gamma(2\alpha' u) = \frac{\sqrt{2\pi} R}{\sqrt{\alpha'}}. \quad (4.9.9)$$

Allora l'azione esatta per $u_i=0$ (con $n+1 \leq i \leq 26$) diventa:

$$S = K \left(a+1 + \sum_{i=1}^n 2\alpha' u_i - \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right) e^{-a} \prod_{i=1}^n Z_1(2\alpha' u_i) \prod_{j=n+1}^{26} \left(\frac{\sqrt{2\pi} R^j}{\sqrt{\alpha'}} \right). \quad (4.9.10)$$

Variando la (4.9.10) rispetto ad a , otteniamo:

$$\frac{\partial S}{\partial a} \propto \left(a + \sum_{i=1}^n 2\alpha' u_i - \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right) \prod_{i=1}^n Z_1(2\alpha' u_i) = 0, \quad (4.9.11)$$

Quindi a è determinato come una funzione di u_i :

$$a = -2\alpha' \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i,j=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \ln Z_1(2\alpha' u_j). \quad (4.9.12)$$

Sostituendo questa espressione di a nell'azione (4.9.10) si ottiene:

$$S = K \exp \left[\sum_{j=1}^n \left(\ln Z_1(2\alpha' u_j) + 2\alpha' u_j - \sum_{j=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \ln Z_1(2\alpha' u_j) \right) \right] \prod_{j=n+1}^{26} \left(\frac{\sqrt{2\pi} R^j}{\sqrt{\alpha'}} \right). \quad (4.9.13)$$

Questa si mostra che è una funzione monotonicamente decrescente delle u_j .

Quindi l'azione S è facilmente minimizzata prendendo $u_j \rightarrow \infty$, il punto fisso infrarosso.

Dalla formula di Stirling otteniamo:

$$\log Z_1(z) = z \log z + \gamma z - z + \log \sqrt{2\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right). \quad (4.9.14)$$

Il valore di S nel limite $u_j \rightarrow \infty$ è dato da:

$$S = K (2\pi)^{n/2} \prod_{j=n+1}^{26} \frac{2\pi R^j}{\sqrt{2\pi\alpha'}} = \tau_{25} (2\pi \sqrt{\alpha'})^n \left(\prod_{j=n+1}^{26} 2\pi R^j \right) = \tau_{25} (2\pi \sqrt{\alpha'})^n V_{26-n}. \quad (4.9.15)$$

Dato che l'azione del solitone (4.9.2) deve essere uguale al prodotto del suo world-volume V_{26-n} per la sua tensione, che questa volta (cioè considerando anche i termini con derivate maggiori) chiamiamo τ_{25-n} (la chiamiamo così in previsione del fatto che in questo caso la tensione del solitone di codimensione n è esattamente quella di una D-(25- n)-brana, come si vede dalla seguente formula (4.9.17)), ne segue allora che dal confronto con la (4.9.15) deve essere che:

$$\tau_{25-n} = (2\pi \sqrt{\alpha'})^n \tau_{25}. \quad (4.9.16)$$

Così il rapporto tra le tensioni è:

$$\frac{\tau_{25-n}}{\tau_{25}} = (2\pi \sqrt{\alpha'})^n, \quad (4.9.17)$$

che è esattamente la risposta che ci si aspetta per le tensioni delle D-brane, cioè con la formula (2.6.11).

Questo è un primo risultato che mostra come una D(p-1)-brana possa essere ottenuta come un solitone tachionico su una Dp-brana, cioè è un primo risultato che mostra l'esattezza della terza congettura di Sen.

Per dare supporto a questa congettura vogliamo costruire la forma esplicita dell'azione del modo tachionico su un solitone posto a sua volta sulla D25-brana originale.

Vedremo che i calcoli seguenti daranno un forte supporto al fatto alla congettura che tale solitone tachionico posto sulla D25-brana originale è identificato con una D-brana di dimensione inferiore.

Per semplicità consideriamo il caso di un solitone del tipo (4.9.2) con n=1, situato sulla D25-brana originale.

Tutti gli altri casi, cioè n=2, 3, ... saranno poi ricavati usando ricorsivamente il risultato che si ottiene per il caso n=1.

A questo scopo decomponiamo il modo costante a del campo tachionico T(X) in due parti:

$$a = a_1 + \tilde{a} \quad (4.9.18)$$

(dove a_1 rappresenta il solitone di codimensione n=1, mentre \tilde{a} rappresenta il modo tachionico su tale solitone), ed imponiamo su a_1 la relazione di "minimizzazione":

$$a_1 = -2\alpha' u_1 + u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} \ln Z_1(2\alpha' u_1) \quad (4.9.19)$$

come fatto nella (4.9.12).

Sostituendo la (4.9.19) nella (4.9.10) e facendo il limite $u_1 \rightarrow \infty$ per ottenere un solitone di codimensione n=1 (questo limite $u_1 \rightarrow \infty$ e la (4.9.19) implementano l'informazione che è a_1 che rappresenta il solitone), l'azione del modo tachionico diventa:

$$S = \lim_{u_1 \rightarrow \infty} \exp \left[2\alpha' u_1 - u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} \ln Z_1(2\alpha' u_1) + \ln Z_1(2\alpha' u_1) \right] \times \quad (4.9.20)$$

$$\times K \left(\tilde{a} + 1 + \sum_{i=2}^n 2\alpha' u_1 - \sum_{i=2}^n u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} \right) e^{-\tilde{a}} \prod_{i=2}^n Z_1(2\alpha' u_1) \prod_{j=n+1}^{26} \left(\frac{\sqrt{2\pi} R^j}{\sqrt{\alpha'}} \right)$$

(che questa costituisce l'azione del modo tachionico può essere visto anche dal fatto che essa dipende solamente da \tilde{a}).

La prima riga semplicemente dà un fattore di $\sqrt{2\pi}$, mentre la seconda riga ha la stessa struttura dell'azione originale (4.9.10) sulla D25-brana, con a sostituito da \tilde{a} ed $i=1$ rimosso.

Quindi, usando la relazione (4.9.20) ricorsivamente, al fine di ottenere l'azione del modo tachionico anche su solitoni di codimensioni $n>1$, concludiamo che l'azione del modo tachionico su tali solitoni tachionici assume la stessa forma dell'azione del tachione sulla D25-brana.

Pertanto, da questo risultato, è ovvio che il campo tachionico che vive sul solitone ha la stessa proprietà del campo tachionico originale che vive sulla D25-brana.

In particolare essi hanno la stessa massa $m^2 = -1/\alpha'$, come verrà dimostrato al paragrafo 4.10.

Questo fatto supporta fortemente la congettura che il solitone tachionico sulla D25-brana originale è identificato con una D-brana di dimensione inferiore (per essere precisi un solitone di codimensione n sembrerebbe rappresentare una $D(25-n)$ brana).

Nel paragrafo 4.9 mostreremo un modo alternativo per dimostrare che l'azione del modo tachionico su un solitone tachionico assume la stessa forma dell'azione del tachione sulla D25-brana.

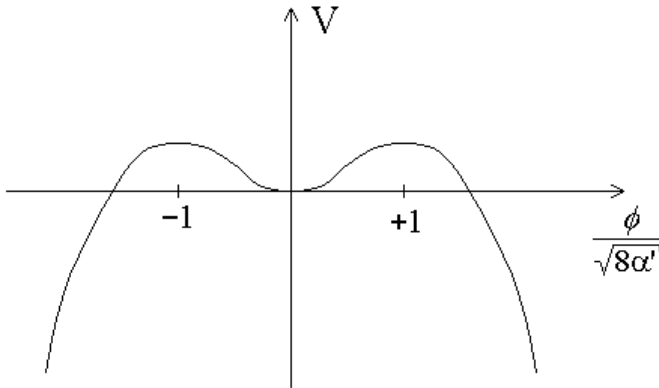
Ora consideriamo la seguente ridefinizione di campo:

$$e^{-T/2} = \frac{1}{\sqrt{8\alpha'}} \phi. \quad (4.9.21)$$

Allora l'azione troncata dalle derivate del campo tachionico, cioè la (4.7.18), diventa:

$$\tilde{S} = \tau_{25} \int d^{26}x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\phi^2}{8\alpha'} \log \frac{\phi^2}{8\alpha' e} \right], \quad (4.9.22)$$

la quale ha il termine cinetico della forma standard, mentre il suo termine di potenziale assume il seguente andamento:



Da qui si vede che la distanza tra massimo e minimo del potenziale nello spazio dei campi è 1, come avevamo già ricavato in precedenza.

In termini del campo ϕ , la soluzione solitonica (4.9.2) prende la forma:

$$\phi = \sqrt{8\alpha'} e^{-u/2} \exp\left(-\frac{u}{2} X^2\right), \quad \text{dove} \quad X^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2, \quad (4.9.23)$$

che è una gaussiana con larghezza $\sim 1/\sqrt{u}$.

4.10 SCOMPARSA DEL TACHIONE NEL VUOTO STABILE

Ora vogliamo determinare lo spettro di massa delle fluttuazioni sul solitone (4.9.23), cioè dei campi che vivono su quel solitone.

Questa parte è tratta da [9] e qui usiamo la stessa notazione che viene usata in tale lavoro.

Innanzitutto in [9] viene studiata la seguente azione:

$$S = 4\epsilon \tau_{p+1} \int d^{p+2}x \left(-\frac{\alpha'}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{4} \log \phi^2 \right), \quad (4.10.1)$$

che coincide con l'azione (4.9.22) se vengono effettuati i riscalamanti $\phi^2 \rightarrow \phi^2 / (8\alpha')$ ed $x \rightarrow x/\sqrt{2}$. In questo modo la soluzione solitonica (4.9.23) diventa:

$$\bar{\phi} = e^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha'}\right), \quad x^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (4.10.2)$$

Ora usiamo la notazione $x \equiv x^{p+1}$, $\bar{y} = y^\mu \equiv (x^0, \dots, x^p)$, $\mu=0, \dots, p$ ed $M=0, \dots, p+1$, per la quale l'azione (4.10.1) diventa:

$$S = 4\epsilon \tau_{p+1} \int d^{p+1}y dx \left(-\frac{\alpha'}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi + \frac{1}{4} \phi^2 \log \phi^2 \right). \quad (4.10.3)$$

Il potenziale ha un minimo (vuoto di stringa chiusa) in $\phi=0$ ed un massimo (D(p+1)-brana originale) in $\phi=\phi_0=\exp(-1/2)$.

Il tachione che vive sulla D(p+1)-brana originale ha massa al quadrato $\alpha' m^2 = V''(\phi_0) = -1$.

Invece nel vuoto di stringa chiusa si ha che il tachione ha massa al quadrato $\alpha' m^2 = V''(0) = \infty$ e quindi su tale vuoto il campo scalare ϕ si disaccoppia dallo spettro.

Quindi abbiamo dimostrato che la massa del campo tachionico ϕ diverge quando la D(p+1)-brana originale decade direttamente nel vuoto di stringa chiusa senza passare per la formazione del solitone.

In altri termini questo dimostra come la condensazione tachionica possa avvenire anche se la D(p+1)-brana originale in questo processo non passa per tutte le D-brane di dimensione inferiore.

Pertanto non si sa ancora se le D-brane di dimensione inferiore effettivamente si formino oppure no durante la condensazione tachionica.

Ora vogliamo dimostrare che anche per le D-brane di dimensione inferiore costruite con dei solitoni sulla D(p+1)-brana originale la massa del tachione diverge direttamente nel vuoto di stringa chiusa senza passare per la formazione di solitoni di codimensione ancora più elevata.

Per semplicità analizziamo il caso del solitone (4.10.2) per $n=1$.

Dalla (4.10.3) si ricava la seguente equazione del moto:

$$\frac{\alpha'}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{dx} \right)^2 = -\frac{1}{4} \bar{\phi}^2 \ln \bar{\phi}^2 = V(\bar{\phi}), \quad (4.10.4)$$

che derivata rispetto ad x dà:

$$\alpha' \left(\frac{d\bar{\phi}}{dx} \right) \frac{d^2\bar{\phi}}{dx^2} = \left(\frac{d\bar{\phi}}{dx} \right) V'(\bar{\phi}). \quad (4.10.5)$$

Ora espandiamo $\phi(x^M)$ attorno alla soluzione (4.10.2) nel seguente modo:

$$\phi(x^M) = \bar{\phi}(x) + \varphi(x, y^\mu). \quad (4.10.6)$$

Sostituendo questa espansione nell'azione (4.10.3) otteniamo:

$$S = 4\epsilon_{p+1} \int d^{p+1}y dx \left[-\frac{\alpha'}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{dx} + \frac{\partial\varphi(x, y^\mu)}{\partial x} \right)^2 - \frac{\alpha'}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\bar{\phi}) - V'(\bar{\phi})\varphi - \frac{1}{2} V''(\bar{\phi})\varphi^2 - \frac{1}{6} V'''(\bar{\phi})\varphi^3 \right],$$

(4.10.7)

avendo usato il fatto che:

$$\partial_M \phi \partial^M \phi = \partial_\mu \varphi(x, y^\mu) \partial^\mu \varphi(x, y^\mu) + \left[\frac{d\bar{\phi}(x)}{dx} + \frac{\partial\varphi(x, y^\mu)}{\partial x} \right]^2 \quad (4.10.8)$$

ed il fatto che:

$$V(\bar{\phi} + \varphi) \simeq V(\bar{\phi}) + V'(\bar{\phi})\varphi + \frac{1}{2} V''(\bar{\phi})\varphi^2 + \frac{1}{6} V'''(\bar{\phi})\varphi^3, \quad \text{dove} \quad V(\phi) = -\frac{1}{4} \phi^2 \log \phi^2.$$

(4.10.9)

Osserviamo ora che:

$$\begin{aligned} \int d^{p+1}y dx \left[-\frac{\alpha'}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 - V'(\bar{\phi})\varphi \right] &= \int d^{p+1}y dx \left\{ -\frac{\alpha'}{2} \left[\left(\frac{d\bar{\phi}}{dx} \right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2 \frac{d\bar{\phi}}{dx} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right] - V'(\bar{\phi})\varphi \right\} = \\ &= \int d^{p+1}y dx \left\{ -\frac{\alpha'}{2} \left[\left(\frac{d\bar{\phi}}{dx} \right)^2 - \varphi \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2 \left(\frac{d^2\bar{\phi}}{dx^2} \right) \varphi \right] - V'(\bar{\phi})\varphi \right\} = \\ &= \int d^{p+1}y dx \left\{ -\frac{\alpha'}{2} \left[\left(\frac{d\bar{\phi}}{dx} \right)^2 - \varphi \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2 \left(\frac{d^2\bar{\phi}}{dx^2} \right) \varphi \right] - \alpha' \left(\frac{d^2\bar{\phi}}{dx^2} \right) \varphi \right\} = \int d^{p+1}y dx \left\{ -\frac{\alpha'}{2} \left[\left(\frac{d\bar{\phi}}{dx} \right)^2 - \varphi \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

(4.10.10)

dove al secondo passaggio abbiamo usato l'integrazione per parti sul secondo e sul terzo termine, mentre al terzo passaggio abbiamo usato la (4.10.5) (dopo aver semplificato la $d\bar{\phi}/dx$ a sinistra e destra) nel quarto termine.

Usando questo risultato, l'azione (4.10.7) può essere espressa nel seguente modo:

$$S = 4\epsilon\tau_{p+1} \int d^{p+1}y dx \left[\left\{ -\frac{\alpha'}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{dx} \right)^2 - V(\bar{\phi}) \right\} - \frac{\alpha'}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \phi \left(-\alpha' \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V''(\bar{\phi}) \phi \right) - \frac{1}{6} V'''(\bar{\phi}) \phi^3 \right].$$

(4.10.11)

Espandendo il campo di fluttuazione $\phi(x, y^\mu)$ in una base completa ortonormale $\{\xi_n(x)\}$:

$$\phi(x, y^\mu) = \sum_n \phi_n(y^\mu) \xi_n(x) \quad (4.10.12)$$

ed osservando che:

$$V''(\bar{\phi}) = -\frac{1}{2} (\ln \bar{\phi}^2 + 3) = -\frac{1}{2} \left(\ln \left(e^{-\frac{x^2}{4\alpha'}} \right) + 3 \right) = \frac{x^2}{4\alpha'} - \frac{3}{2}, \quad (4.10.13)$$

ne segue che il terzo termine nell'azione (4.10.11) ha la seguente struttura:

$$-\frac{1}{2} \sum_{n,m} \phi_n(y^\mu) \phi_m(y^\mu) \xi_n(x) \left[-\alpha' \frac{d^2 \xi_m(x)}{dx^2} + \left(\frac{x^2}{4\alpha'} - \frac{3}{2} \right) \xi_m(x) \right]. \quad (4.10.14)$$

Quindi, se $\xi_n(x)$ risolve la seguente equazione agli autovalori:

$$-\alpha' \frac{d^2 \xi_n(x)}{dx^2} + \left(\frac{x^2}{4\alpha'} - \frac{3}{2} \right) \xi_n(x) = \alpha' M_n^2 \xi_n(x), \quad (4.10.15)$$

cioè l'equazione:

$$-\alpha' \frac{d^2 \xi_n(x)}{dx^2} + \frac{x^2}{4\alpha'} \xi_n(x) = \left(\alpha' M_n^2 + \frac{3}{2} \right) \xi_n(x), \quad (4.10.16)$$

allora i campi $\phi_n(y^\mu)$ che vivono sul solitone hanno massa al quadrato definita M_n^2 .

Infatti, se $\xi_n(x)$ risolve l'equazione (4.10.16), allora vale la (4.10.15), che sostituita, assieme alla (4.10.14), dentro all'azione (4.10.11) dà:

$$\begin{aligned}
S &= 4\epsilon_{p+1} \int d^{p+1}y dx \sum_{n,m} \xi_n(x) \xi_m(x) \left(-\frac{\alpha'}{2} \partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_m - \frac{\alpha'}{2} M_n^2 \phi_n \phi_m \right) = \\
&= \sum_{n,m} 4\epsilon_{p+1} \int dx \xi_n(x) \xi_m(x) \int d^{p+1}y \left(-\frac{\alpha'}{2} \partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_m - \frac{\alpha'}{2} M_n^2 \phi_n \phi_m \right) = \\
&= \sum_{n,m} 4\epsilon_{p+1} \delta_{nm} \int d^{p+1}y \left(-\frac{\alpha'}{2} \partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_m - \frac{\alpha'}{2} M_n^2 \phi_n \phi_m \right) = \sum_n 4\epsilon_{p+1} \int d^{p+1}y \left(-\frac{\alpha'}{2} \partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n - \frac{\alpha'}{2} M_n^2 \phi_n^2 \right),
\end{aligned}$$

(4.10.17)

avendo usato la relazione di ortonormalità:

$$\int dx \xi_n(x) \xi_m(x) = \delta_{nm} \quad (4.10.18)$$

della base $\{\xi_n(x)\}$.

Quindi abbiamo ottenuta l'azione di infiniti campi scalari liberi di massa al quadrato M_n^2 , il che dimostra la nostra precedente affermazione.

Osserviamo ora che l'equazione (4.10.16) è ben nota in meccanica quantistica.

Infatti essa è l'equazione di Schrodinger dell'oscillatore armonico (comunque, nonostante abbiamo ricavato un'equazione molto usata in meccanica quantistica, la nostra teoria è classica, dato che stiamo analizzando un background classico).

Le soluzioni di questa equazione agli autovalori sono ben note: l'n-esima autofunzione di questa equazione è data dal prodotto del fattore gaussiano $\exp(-x^2/(4\alpha'))$ con l'n-esimo polinomio di Hermite $H_n(x/\sqrt{2\alpha'})$, ed ha autovalore $n+1/2$.

Quindi lo spettro di massa è dato da:

$$\alpha' M_n^2 + \frac{3}{2} = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.10.19)$$

ovvero da:

$$M_n^2 = \frac{n-1}{\alpha'}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10.20)$$

Questo spettro include uno stato tachionico di massa al quadrato $m^2 = -1/\alpha'$ (cioè quello che si ottiene per $n=0$), uno stato di massa nulla (cioè quello che si ottiene per $n=1$), ed infiniti stati massivi discreti (cioè quelli che si ottengono per $n \geq 2$).

Ciò dimostra l'affermazione fatta al paragrafo 4.9, cioè che il campo tachionico che vive sul solitone ed il campo tachionico originale che vive sulla $D(p+1)$ -brana hanno la stessa massa $m^2 = -1/\alpha'$.

Abbiamo dimostrato che il campo tachionico $\phi(x^M)$ su una $D(p+1)$ -brana induce un tachione, un campo scalare di massa nulla ed infiniti campi scalari massivi.

Questa procedura può essere poi generalizzata al caso di un solitone (sfericamente simmetrico) di codimensione n qualsiasi, nel qual caso l'equazione di Schrodinger diventa appunto quella di un

oscillatore armonico sfericamente simmetrico e porta ad ottenere un tachione, n scalari di massa nulla e degli stati massivi degeneri.

Ora vogliamo analizzare il decadimento del solitone, sempre nel caso di codimensione uno, e cioè il decadimento della soluzione (4.10.2) per n=1.

Siccome sappiamo che il campo di fluttuazione $\varphi(x, y^\mu)$ è espanso usando le autofunzioni dell'equazione di Schrodinger (4.10.16), cioè le autofunzioni:

$$\xi_n(x) = \frac{1}{2^{n/2} \sqrt{n!}} H_n \left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha'}} \right) e^{-\frac{x^2}{4\alpha'}}, \quad (4.10.21)$$

ne segue che il campo tachionico originale $\phi(x^M)$ può essere scritto come:

$$\phi(x^M) = \bar{\phi}(x) + \varphi(x, y^\mu) = e^{-\frac{x^2}{4\alpha'}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_n(y^\mu) \frac{1}{2^{n/2} \sqrt{n!}} H_n \left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha'}} \right) e^{-\frac{x^2}{4\alpha'}}. \quad (4.10.22)$$

Se $\bar{\phi}(x, \hat{y}^\mu)$ denota la configurazione di $\varphi(x, y^\mu)$ che rappresenta il decadimento del solitone, allora $\bar{\phi} + \bar{\phi}$ dovrebbe essere uguale a 0 (cioè al minimo del potenziale $V(\phi)$: vedere anche la figura del paragrafo 4.9) ovunque.

Ma notiamo che:

$$H_0(x/\sqrt{2\alpha'}) = 1, \quad (4.10.23)$$

e quindi, usando la (4.10.22), si ottiene che:

$$0 = \bar{\phi}(x) + \bar{\phi}(x, \hat{y}^\mu) = (1 + \bar{\eta}_0(\hat{y}^\mu)) e^{-\frac{x^2}{4\alpha'}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\eta}_n(\hat{y}^\mu) \frac{1}{2^{n/2} \sqrt{n!}} H_n \left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha'}} \right) e^{-\frac{x^2}{4\alpha'}}. \quad (4.10.24)$$

Essendo poi le autofunzioni $\xi_n(x)$ tra loro ortogonali (il che è espresso anche dalla (4.10.18)), ne segue che la (4.10.24) è soddisfatta se e sole se:

$$1 + \bar{\eta}_0 = 0, \quad \bar{\eta}_n = 0 \quad \forall n \geq 1. \quad (4.10.25)$$

Da qui si vede che solamente lo stato fondamentale tachionico condensa, mentre tutti gli altri modi rimangono con un valore di aspettazione nullo.

Ciò spiega perchè possiamo ottenere dei risultati esatti dalla teoria senza basarci su delle approssimazioni come il troncamento dei livelli.

Questo è analogo a quanto visto nel paragrafo 4.6 quando abbiamo annullato i campi $A_\mu, B_{\mu\nu}, \dots$ (comunque ovviamente le due cose non sono identiche, dato che nel caso ora analizzato quelli che vengono annullati sono dei campi scalari, mentre $A_\mu, B_{\mu\nu}, \dots$ sono dei campi vettoriali e tensoriali).

Ora interpoliamo tra la soluzione solitonica completa $\bar{\phi}(x)$ ed il vuoto di stringa chiusa $\phi=0$ nel seguente modo:

$$\phi(x^M; \eta_0) = (1 + \eta_0) \bar{\phi}(x) + \phi(x, y^\mu), \quad (4.10.26)$$

dove η_0 varia da 0 (il che rappresenta il solitone) a -1 (il che rappresenta il vuoto di stringa chiusa). Rifacendo tutti i passaggi precedenti con la (4.10.26) al posto della (4.10.6), si ottiene che l'equazione di Schrodinger diventa:

$$-\alpha' \frac{d^2 \xi_n(x)}{dx^2} + \frac{x^2}{4\alpha'} \xi_n(x) = \left(\alpha' M_n^2 + \frac{3}{2} + \ln(1 + \eta_0) \right) \xi_n(x), \quad (4.10.27)$$

il cui spettro di massa è:

$$M_n^2 = \frac{n-1}{\alpha'} - \frac{1}{\alpha'} \ln(1 + \eta_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.10.28)$$

Quindi la massa al quadrato di ciascuno di questi stati scalari diverge a $+\infty$ per $\eta_0 \rightarrow -1$, e cioè nel vuoto di stringa chiusa, ovvero dopo il decadimento diretto del solitone.

Questi risultati possono essere generalizzati al caso di sviluppo attorno ad un solitone di codimensione qualsiasi ed il risultato è lo stesso.

Quindi abbiamo verificato che la massa del tachione (e cioè del modo che si ottiene per $n=0$) che vive sul solitone tachionico diverge quando il solitone decade direttamente sul vuoto di stringa chiusa senza passare per la formazione di solitoni di codimensione ancora maggiore.

Questo quindi dimostra che la seconda congettura di Sen è almeno in parte (cioè almeno per il tachione) verificata anche se la condensazione tachionica non avviene attraverso la formazione di D-brane di dimensione inferiore rispetto a quella di partenza.

4.11 UNA SOLUZIONE DI ROLLING

Finora abbiamo discusso solamente soluzioni indipendenti dal tempo delle equazioni del moto del tachione.

Cosa si può dire invece sulle soluzioni dipendenti dal tempo?

In particolare, dato il tachione sulla D25-brana originale: cosa succede se spostiamo il tachione dal massimo del potenziale e gli permettiamo di rotolare (rolling) verso il suo punto di minimo?

Ora vediamo il metodo generale per costruire soluzioni dipendenti dal tempo nel contesto di una teoria di campo scalare, che poi generalizzeremo al caso della teoria di campo di stringa (indipendente dal background. Questa generalizzazione può essere fatta anche per la cubic string field theory, come mostrato in [31]).

Iniziamo con l'azione di un campo scalare ϕ in $p+1$ dimensioni (a noi interesserà il caso di $p=25$) con termine cinetico standard e potenziale $V(\phi)$:

$$S = - \int d^{p+1} x \left[\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + V(\phi) \right]. \quad (4.11.1)$$

Inoltre assumiamo che $V(\phi)$ abbia un massimo in $\phi=0$, con:

$$V''(0) = -m^2. \quad (4.11.2)$$

Vogliamo studiare la soluzione dipendente dal tempo di questa equazione determinata da una data condizione iniziale.

Per semplicità consideriamo delle configurazioni di campo spazialmente omogenee.

In questo caso la soluzione è caratterizzata da due parametri: la posizione e la velocità iniziali di ϕ .

Le condizioni al contorno che possono essere scelte sono:

$$\phi = \lambda, \quad \partial_0 \phi = 0, \quad \text{in} \quad x^0 = 0 \quad (4.11.3 \text{ a})$$

$$\phi = 0, \quad \partial_0 \phi = m\lambda, \quad \text{in} \quad x^0 = 0 \quad (4.11.3 \text{ b})$$

Per questo campo scalare convenzionale ϕ la (4.11.3 a) vale quando la densità di energia totale del sistema è minore di $V(0)$ cosicchè il campo rimanga a riposo in un punto lontano dallo 0, mentre la (4.11.3 b) vale quando la densità di energia totale del sistema è maggiore di $V(0)$ cosicchè il campo ϕ durante il suo moto passi lo zero con velocità non-nulla (vedremo che la stessa interpretazione vale anche per la teoria di campo di stringa aperta).

Consideriamo il caso con $E < V(0)$.

In questo caso $\partial_0 \phi$ (dove ricordiamo che l'indice 0 rappresenta il tempo) si annulla in qualche istante di tempo quando $V(\phi) = E$.

Prenderemo questo istante come l'origine di x^0 .

Così ora la soluzione è caratterizzata da solamente un parametro, cioè il valore di ϕ ad $x^0=0$, valore che indichiamo con λ .

Saremo interessati al caso in cui λ è piccolo ma non infinitesimo.

L'equazione del moto è del tipo di Klein-Gordon.

Nel caso di soluzioni dipendenti solamente dal tempo (in questo modo l'analisi è più semplice) il laplaciano contenuto nell'equazione di Klein-Gordon dà un contributo nullo e quindi l'equazione del moto diventa:

$$\partial_0^2 \phi + V'(\phi) = 0. \quad (4.11.4)$$

È diretto integrare (numericamente) questa equazione, ma questo metodo di risoluzione non può essere generalizzato al caso della teoria di campo di stringa, nella quale le equazioni del moto contengono un numero infinito di derivate temporali (e spaziali).

Pertanto seguiremo un metodo di risoluzione indiretto che può essere generalizzato nel contesto della teoria di campo di stringa.

L'idea di base è quella di effettuare una rotazione di Wick $x^0 = ix$, e scrivere la (4.11.4) come:

$$\partial_x^2 \phi - V'(\phi) = 0. \quad (4.11.5)$$

Se $\phi = f(x)$ è una soluzione dell'equazione (4.11.5), allora $\phi = f(-ix^0)$ sarà una soluzione della (4.11.4). Così ora lo scopo è quello di risolvere la (4.11.5) con la condizione al contorno $\phi = \lambda, \partial_x \phi = 0$ in $x=0$.

Questo chiaramente può essere pensato come un moto di una particella nel potenziale $-V(\phi)$. Siccome $V(\phi)$ ha un massimo in $\phi=0$, allora $-V(\phi)$ ha un minimo in $\phi=0$, e quindi per piccoli λ le soluzioni dell'equazione del moto (4.11.5) oscilleranno attorno allo zero.

Il periodo di oscillazione $T \equiv 2\pi/\omega$ è una funzione generale di λ .

Così la soluzione può essere sviluppata in serie di Fourier:

$$\phi(x; \lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x). \quad (4.11.6)$$

Si ricava la soluzione della (4.11.5) usando la teoria delle perturbazioni (e quindi un metodo iterativo), e sostituendo $x = ix^0$ in tale soluzione, si ottiene la soluzione della (4.11.4):

$$\phi(x^0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\hat{\lambda}) \cosh(n\omega(\hat{\lambda})x^0) \quad (4.11.7)$$

dove $\hat{\lambda} \equiv a_1$ (i coefficienti a_n nella (4.11.7) sono gli stessi che si determinano per la (4.11.5)).

Questo dà una famiglia di soluzioni caratterizzate da un parametro, cioè $\hat{\lambda}$.

$\hat{\lambda}$ determina il valore iniziale λ di ϕ , con la relazione precisa tra $\hat{\lambda}$ e λ data da:

$$\lambda = \phi(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\hat{\lambda}). \quad (4.11.8)$$

Quindi abbiamo ricavato una soluzione del sistema dipendente dal tempo.

Ora vogliamo generalizzare questo metodo al caso della teoria di campo di stringa indipendente dal background (per il caso bosonico).

Associato allo stato tachionico di momento nullo, c'è un operatore di vertice V_T sul bordo del disco, di dimensione $h < 1$.

Siccome il tachione ha massa al quadrato pari a $-m^2$, nelle unità di misura per le quali $\alpha' = 1$ si ha che:

$$(h-1) \equiv -m^2, \quad (4.11.9)$$

cosicché $V_T e^{ik \cdot X}$ ha dimensione 1 per $k^2 = m^2$.

Nel caso del campo scalare ϕ prima considerato, se spostiamo il campo tachionico T di una distanza λ dal suo massimo, e permettiamo al sistema di evolvere nel tempo, allora all'ordine dominante in λ la soluzione dell'equazione del moto (4.11.4) è data da $\lambda \cosh(mx^0)$.

Dopo la rotazione di Wick questo corrisponde a $\lambda \cos(mx)$.

Invece, nel caso della teoria di campo di stringa, la soluzione corrispondente delle equazioni del moto linearizzate del campo di stringa è data da:

$$\lambda \cos(mX(0)) V_T(0) c_1 |0\rangle. \quad (4.11.10)$$

Generalizzando al caso della teoria di campo di stringa la procedura iterativa usata prima nel caso del campo scalare ϕ , dobbiamo iterare questa soluzione iniziale (4.11.10) al fine di ottenere la soluzione finale.

Da qui si vede che, per piccoli λ , accendere la perturbazione di background $\phi \simeq \lambda \cos(mx)$ corrisponde a deformare la teoria di campo conforme di bordo originale attraverso una perturbazione (deformazione) di bordo della forma:

$$\hat{\lambda} \int d\theta V_T(\theta) \cos(\omega X(\theta)), \quad (4.11.11)$$

dove θ è la solita variabile angolare sul bordo del disco.

Comunque per $\hat{\lambda}$ finito, il parametro che appare nella (4.11.11) potrebbe non essere uguale al valore di $T(x^0)$ (questa sarebbe la generalizzazione della (4.11.8) al caso della teoria di campo di stringa).

Pertanto è più appropriato indicare la perturbazione come:

$$\tilde{\lambda} \int d\theta V_T(\theta) \cos(\omega X(\theta)), \quad (4.11.12)$$

con $\tilde{\lambda} = \hat{\lambda} + \mathcal{O}(\hat{\lambda}^2)$.

Affinchè la (4.11.12) descriva una teoria di campo conforme di bordo, la funzione β della teoria deve annullarsi: questa è la definizione di *perturbazione marginale*, cioè una perturbazione che sia compatibile con l'equazione del moto $\beta=0$.

Siccome $\cos(\omega X) V_T$ ha peso conforme $(\omega^2+h)=(\omega^2-m^2+1)$, la funzione β per l'accoppiamento $\tilde{\lambda}$ ha la forma:

$$\beta_{\tilde{\lambda}} = (\omega^2 - m^2) \tilde{\lambda} + g(\omega, \tilde{\lambda}), \quad (4.11.13)$$

dove $g(\omega, \tilde{\lambda})$ rappresenta i contributi di ordine più alto (in $\tilde{\lambda}$) alla funzione $\beta_{\tilde{\lambda}}$.

Quindi l'annullamento della funzione β richiede che:

$$(\omega^2 - m^2) \tilde{\lambda} + g(\omega, \tilde{\lambda}) = 0. \quad (4.11.14)$$

Certamente, allo scopo di mostrare che la teoria perturbata è conforme, dobbiamo assicurare che anche le funzioni β associate agli altri operatori di bordo svaniscano.

A questo scopo notiamo che se O rappresenta un operatore di bordo di dimensione h_O , e se aggiungiamo questo operatore con coefficiente λ_O nella teoria perturbata, allora la funzione β dell'accoppiamento λ_O è data da:

$$\beta_O = (h_O - 1) \lambda_O + g_O(\tilde{\lambda}, \lambda_O, \dots), \quad (4.11.15)$$

dove ... denota le costanti di accoppiamento associate agli altri operatori aggiunti alla teoria, e g_0 è il contributo a β_0 dato dalle correzioni quantistiche di ordine più elevato.

Infine, data questa teoria di campo conforme di bordo, che è stata ricavata dalla (4.11.12), possiamo ottenere una teoria di campo conforme di bordo dipendente dal tempo effettuando la rotazione di Wick $X \rightarrow -iX^0$.

Questo corrisponde ad aggiungere la perturbazione:

$$\tilde{\lambda} \cosh(\omega X^0(0)) V_T(0) c_1 |0\rangle. \quad (4.11.16)$$

A questo punto Sen determina il tensore energia-impulso, usando gli stati di bordo (definiti in [32][33][34][35]) associati a questa teoria di campo conforme di bordo.

In [36] vengono considerate delle perturbazioni tecnicamente più semplici di quelle appena esposte, il che permette di evitare la tecnica di calcolo che fa uso degli stati di bordo e di usare invece dei metodi elementari.

La più semplice delle deformazioni marginali studiate in questo articolo è:

$$T(X) = \lambda e^{X^0}. \quad (4.11.17)$$

Questa è una deformazione marginale esatta della CFT e quindi è una soluzione esatta delle equazioni del moto della stringa classica.

Essa è interpretata nello spaziotempo come una perturbazione ad $X^0 = -\infty$, che sposta il tachione in modo infinitesimo dal punto di massimo instabile del potenziale.

In modo alternativo, questo profilo corrisponde a scalfare il tachione da $T(X^0=0)=\lambda$, con velocità $\partial_t T(X^0=0)=\lambda$.

Siccome questo disturbo è automaticamente infinitesimo, il profilo (4.11.17) sembra essere un esempio particolarmente pulito di rolling tachionico.

Inoltre il profilo (4.11.17) è anche particolarmente semplice da un punto di vista tecnico, come di seguito spiegato.

Le deformazioni marginali più semplici della teoria di campo conforme del world-sheet sono generate dall'operatore di vertice:

$$V_T(X) = e^{ik \cdot X}, \quad k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = -1. \quad (4.11.18)$$

Certamente questi operatori non possono essere sommati all'azione di world-sheet perchè essi corrispondono a potenziali complessi.

Il rimedio standard è quello di sommare anche l'operatore complesso coniugato e quindi di considerare perturbazioni della forma:

$$T(\vec{X}) = \lambda \cos(\vec{k} \cdot \vec{X}) = \frac{\lambda}{2} \left(e^{i\vec{k} \cdot \vec{X}} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{X}} \right), \quad \vec{k}^2 = 1. \quad (4.11.19)$$

Dopo continuazione analitica questo porta al profilo di Sen $T(X)=\lambda \cosh(X^0)$.

Una procedura alternativa, usata in questo articolo, consiste nel notare che nel caso speciale $k_0 = -i, \vec{k} = \vec{0}$, l'operatore di vertice (4.11.18) è reale, e quindi il profilo (4.11.17) può essere considerato direttamente, senza sommarli il suo complesso coniugato.

Questo è molto più semplice perchè, nel caso della (4.11.19), emergono delle complicazioni a causa dei termini di sovrapposizione tra i due esponenziali.

Ora mostriamo la tecnica alternativa usata nell'articolo [36].

Per cominciare, scriviamo l'azione S come un integrale di spazio-tempo su una densità di lagrangiana.

Dividiamo X^μ in una costante x^μ ed in una parte che varia X'^μ , cioè $X^\mu = x^\mu + X'^\mu$.

In questo modo l'azione può essere scritta come segue:

$$S \propto \int [dX^\mu] e^{-I_{bulk} - I_{bdy}} = \int d^p x \sqrt{-g} \int [dX'^\mu] e^{-\frac{1}{2\pi} \int_D d^2 z g_{\mu\nu} \partial X'^\mu \bar{\partial} X'^\nu - I_{bdy}}, \quad (4.11.20)$$

dove I_{bdy} è definito attraverso la (4.11.17), cioè:

$$I_{bdy}(x + X') = \lambda e^{x^0} \int d\theta e^{X'^0}. \quad (4.11.21)$$

Nella (4.11.20), al primo passaggio abbiamo usato il fatto che, ai punti fissi t^* del gruppo di rinormalizzazione (cioè ai punti t^* tali che $\beta^I(t^*)=0$), si ha che:

$$S(t^*) = Z(t^*), \quad (4.11.22)$$

come si vede dalla (4.4.8).

Invece, al secondo passaggio della (4.11.20), abbiamo effettuato l'ovvia generalizzazione dell'espressione al caso di spazio curvo.

Stiamo considerando l'accoppiamento alla gravità per esplorare l'evoluzione temporale di una D-brana instabile in un background piatto.

Cioè noi siamo interessati (il perchè verrà chiarito più avanti) al tensore energia-impulso nel caso di assenza di gravità (ovvero di background piatto), ma siccome il tensore energia-impulso è definito da:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (4.11.23)$$

ne segue che prima dobbiamo usare l'azione di spazio-tempo nel caso di accoppiamento con la gravità $g_{\mu\nu}$ (e cioè la (4.11.20)) per calcolare la (4.11.23), e poi dobbiamo porre $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

Usando poi:

$$\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \quad (4.11.24)$$

si trova che:

$$T_{\mu\nu}(x) = K(\mathcal{B}(x)\eta_{\mu\nu} + \mathcal{A}_{\mu\nu}(x)), \quad (4.11.25)$$

in uno spazio piatto.

Qui K è una costante di normalizzazione globale e:

$$\mathcal{B}(x) = \int [dX^\mu] e^{-\frac{1}{2\pi} \int_D d^2z \eta_{\mu\nu} \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu - I_{bdy}}, \quad (4.11.26 a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mu\nu}(x) &= 2 \int [dX^\mu] \int \frac{d^2z}{2\pi} \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{-\frac{1}{2\pi} \int_D d^2z \eta_{\mu\nu} \frac{1}{2\pi} \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu - I_{bdy}} = \\ &= 2 \int [dX^\mu] \partial X^\mu(0) \bar{\partial} X^\nu(0) e^{-\frac{1}{2\pi} \int_D d^2z \eta_{\mu\nu} \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu - I_{bdy}}. \end{aligned} \quad (4.11.26 b)$$

Nella seconda linea della (4.11.26 b) abbiamo fissato la posizione degli operatori di vertice ed abbiamo usato il fatto che:

$$\int_D \frac{d^2z}{2\pi} = \frac{1}{\pi} A(D) = 1 \quad (4.11.27)$$

per il disco unitario.

L'espressione (4.11.25) per il tensore energia-impulso è stata derivata per la prima volta da Sen [37] usando l'invarianza BRST del corrispondente stato di bordo.

Partendo dalle (4.11.26), si dimostra [36] che:

$$\mathcal{B}(x^0) = f(x^0), \quad \begin{cases} \mathcal{A}^{00}(x^0) = f(x^0) - 2 \\ \mathcal{A}^{ij}(x^0) = \delta^{ij} f(x^0) \end{cases} \quad (4.11.28)$$

dove:

$$f(x^0) \equiv \frac{1}{1 + 2\pi\lambda e^{x^0}} \quad \forall |\lambda| < \frac{1}{2\pi} e^{-x^0} \quad (4.11.29)$$

(il regime di validità può essere esteso con una continuazione analitica per includere tutti i λ positivi).

Osserviamo innanzitutto che $\mathcal{B}(x^0)$ è la funzione di partizione sul disco, ad eccezione del fatto che gli zero modi rimangono non-integrati, come si vede dalla (4.11.26 a).

Quindi, ricordando la (4.5.78) e la (4.11.29), ne segue che il campo tachionico rinormalizzato assume la seguente espressione:

$$T_R = 1 - f(x^0) = \frac{2\pi\lambda e^{x^0}}{1 + 2\pi\lambda e^{x^0}}. \quad (4.11.30)$$

Da qui si vede che nel limite di $x^0 \rightarrow -\infty$ si ha $T_R \rightarrow 0$, mentre nel limite di $x^0 \rightarrow +\infty$ si ha $T_R \rightarrow 1$. A questo punto, ricordando la (4.5.85), si vede che $T_R \rightarrow 0$ corrisponde a $\tilde{T} \rightarrow 0$, e cioè al punto di massimo del potenziale tachionico, mentre $T_R \rightarrow 1$ corrisponde a $\tilde{T} \rightarrow +\infty$, cioè al punto di minimo del potenziale tachionico.

Inoltre dalla (4.11.25) e dalla (4.11.28) si vede che:

$$T_{00} = K(-\mathcal{B}(x^0) + \mathcal{A}_{00}(x^0)) = -\mathcal{T}_p, \quad T_{ij} = K(\mathcal{B}(x^0) + \mathcal{A}_{ij}(x^0)) = \delta_{ij} \mathcal{T}_p f(x^0), \quad (4.11.31)$$

avendo usato il fatto che la costante di normalizzazione si dimostra (effettuando il confronto con il limite statico $\lambda=0$) essere $K = \mathcal{T}_p/2$.

Da qui si vede che T_{00} è indipendente da x^0 , che rappresenta semplicemente la conservazione dell'energia.

Inoltre, $T_{ij} \rightarrow 0$ per $x^0 \rightarrow +\infty$, così la pressione si annulla in questo limite (infatti la pressione è definita come $T_{ij} = p(x^0) \delta_{ij}$), cioè il prodotto del decadimento è della materia tachionica senza pressione, proprio come si ottiene nel caso analizzato da Sen.

Ora spieghiamo perchè il calcolo del tensore energia-impulso è importante.

Nel modello cosmologico di Fridman-Robertson-Walker quello che interessa conoscere è il valore della costante di proporzionalità ρ tra energia e pressione.

Dalla (4.11.31) si vede che questa costante di proporzionalità è $-f(x^0)$, che tende a zero per $x^0 \rightarrow +\infty$, cioè sul minimo del potenziale tachionico.

Nel modello di Fridman-Robertson-Walker si dimostra che $\rho=0$ descrive un sistema di polvere non-rotante e non-interagente (incoerente).

Pertanto le configurazioni classiche per tempi grandi che emergono dalla condensazione tachionica descrivono un universo di questo tipo.

Questa è una branca della fisica chiamata *cosmologia tachionica*.

Inoltre abbiamo visto che l'azione (4.7.18) è esatta nel caso in cui il campo tachionico T sia costante, e quindi in particolare quando esso non varia nel tempo.

Quello che interessa invece è la generica azione del tachione, cioè quella che descriva anche l'evoluzione temporale di tale campo, soprattutto vicino al punto di minimo del potenziale.

In questo caso l'azione esatta non è nota, e quindi l'unica cosa che per ora si può fare è congetturarne la forma.

Il fatto che, durante il processo di condensazione tachionica, l'energia sia costante e che la pressione tenda a zero, suggerisce una specifica forma dell'azione di spaziotempo in questione.

Se in particolare consideriamo l'evoluzione temporale del tachione su una D25-brana, questa forma è [38]:

$$S = -\int d^{26}x V(T) \sqrt{1 + \eta^{\mu\nu} \partial_\mu T \partial_\nu T}, \quad (4.11.32)$$

che è un'azione del tipo di Born-Infeld scalare (l'azione di Born-Infeld l'abbiamo introdotta al paragrafo 2.6).

Questa azione non è stata derivata da principi primi, ma è stata considerata solamente perchè essa è consistente con l'evoluzione temporale del tensore energia-impulso del tachione.

Infatti le soluzioni classiche dipendenti dal tempo dell'azione (4.11.32) includono soluzioni con densità di energia costante e pressione che asintoticamente tende a zero, proprio come quelle ricavate nell'ambito della teoria di campo di stringa.

Inoltre la quantizzazione canonica della (4.11.32) accoppiata alla gravità porta alla possibilità di interpretare il tachione come la definizione del tempo in cosmologia quantistica.

Per di più un vuoto non perturbativo a cui tende il tachione è uno dei modi per introdurre in modo semplice una costante cosmologica.

CONCLUSIONI

In questo lavoro abbiamo descritto la teoria dei campi e la teoria delle stringhe in prima quantizzazione, esponendo i motivi che hanno portato alla formulazione di queste due teorie ed in particolare alla loro fusione, a definire la cosiddetta *teoria di campo di stringa*.

Abbiamo infatti dimostrato che la teoria delle stringhe in prima quantizzazione contiene un tachione nel suo spettro, e quindi abbiamo concluso, in analogia con il caso della particella puntiforme, che la teoria delle stringhe dovesse essere formulata in seconda quantizzazione per risolvere questo problema.

Abbiamo così mostrato la prima (a livello storico) formulazione in seconda quantizzazione della teoria delle stringhe aperte, nota con il nome di cubic string field theory, esponendone le caratteristiche, in particolare l'impossibilità di ricavarne dei risultati esatti a causa dello sviluppo perturbativo a cui essa dà origine.

Inoltre questa teoria parte da una metrica di spaziotempo fissata a priori, e quindi non è indipendente dal background.

Abbiamo allora visto com'è possibile definire una teoria di campo di stringa che sia indipendente dal background (che abbiamo considerato classico): lo abbiamo fatto prima nel caso della stringa chiusa e poi, procedendo per confronto, lo abbiamo fatto anche per la stringa aperta.

In questa formulazione abbiamo ricavato l'equazione del moto del tachione annullando la funzione β del gruppo di rinormalizzazione ed abbiamo mostrato come è possibile ricavare un'azione di spaziotempo che permetta di ricavare tali equazioni attraverso il principio variazionale (cioè attraverso le equazioni di Eulero-Lagrange).

Abbiamo poi mostrato come effettuare la rinormalizzazione del campo tachionico e spiegato quando è possibile semplificare l'analisi del sistema attraverso la linearizzazione della funzione β .

Inoltre dall'azione di spaziotempo abbiamo ricavato il potenziale tachionico, dalla cui forma abbiamo scoperto che esso effettivamente presenta un punto di massimo ed un punto di minimo, in accordo con la prima congettura di Sen.

Abbiamo poi dimostrato che nel punto di minimo del potenziale solamente il campo tachionico presenta valore di aspettazione non-nullo, il che giustifica l'annullamento dei modi di stringa eccitata nei conti precedenti.

Pertanto abbiamo visto che nella formulazione indipendente dal background effettivamente è corretto considerare solamente il campo tachionico nel calcolo dell'azione di spaziotempo e del potenziale, il che significa che i risultati ottenuti considerando solamente il tachione sono esatti.

Questa è un'importante caratteristica che distingue la background independent string field theory dalla cubic string field theory, nella quale i modi di stringa eccitata assumono un valore di aspettazione non-nullo sullo stato di vuoto stabile e quindi devono essere considerati nei calcoli, a tutti gli ordini, che sono infiniti in numero.

Pertanto, a differenza della cubic string field theory, la background independent string field theory in linea di principio permette di verificare esattamente la prima congettura di Sen, cioè la separazione energetica tra i due vuoti del potenziale tachionico.

Infatti abbiamo mostrato che la prima congettura di Sen è effettivamente verificata, una volta ricavata la forma del potenziale tachionico partendo dall'azione di spaziotempo ad impulso nullo. Abbiamo poi verificato la seconda congettura di Sen, cioè l'assenza di stati di stringa aperta nel vuoto stabile, solamente per il campo tachionico: la piena dimostrazione della seconda congettura è invece compito della cosiddetta *vacuum string field theory*, che esula dallo scopo di questo lavoro. Abbiamo inoltre verificato la terza congettura di Sen, cioè la possibilità di interpretare un solitone di codimensione n sulla D25-brana originale come una $D(25-n)$ -brana. Abbiamo verificato questa congettura sia determinando il rapporto delle tensioni dei solitoni (e verificando che esso effettivamente sia uguale al rapporto delle tensioni tra le D-brane), sia mostrando che l'azione del modo tachionico che vive su tali solitoni tachionici assume la stessa forma dell'azione del tachione sulla D25-brana originale. Abbiamo poi dimostrato anche che il decadimento di una D-brana sul vuoto di stringa chiusa può avvenire anche direttamente, cioè senza passare per tutte le D-brane di dimensione inferiore. Tutto questo riguarda solamente le soluzioni indipendenti dal tempo delle equazioni del moto del tachione. Pertanto infine abbiamo mostrato come descrivere questa evoluzione temporale, cioè, dato il tachione sulla D25-brana originale, abbiamo mostrato cosa succede se spostiamo il tachione dal massimo del potenziale e gli permettiamo di rotolare (rolling) verso il suo punto di minimo, processo che è definito *condensazione tachionica*. Abbiamo studiato questo processo nel caso di un profilo tachionico particolare, che è interpretato nello spaziotempo come una perturbazione ad $X^0 = -\infty$, che sposta il tachione in modo infinitesimo dal punto di massimo instabile del potenziale. Da qui, in termini del campo tachionico rinormalizzato, abbiamo verificato che, quando lo zero-modo x^0 tende a $-\infty$, questo corrisponde ad avere il tachione sul punto di massimo del potenziale, mentre $x^0 \rightarrow +\infty$ corrisponde ad avere il tachione sul punto di minimo. Inoltre abbiamo ricavato che la densità di energia durante il processo si mantiene costante, mentre la pressione tende asintoticamente a zero. Questo permette di determinare che lo stato dell'universo nel modello cosmologico di Fridman-Robertson-Walker è, per $x^0 \rightarrow +\infty$, quello di un sistema di polvere non-rotante e non-interagente (incoerente), ed inoltre permette di congetturare una forma dell'azione di spaziotempo per descrivere l'evoluzione temporale del tachione attorno al punto di minimo del potenziale, azione che presenta poi delle applicazioni nell'ambito della cosmologia quantistica.

APPENDICE

A.1 IMPOSTAZIONE MODERNA DELLA TEORIA DI CAMPO PER LA PARTICELLA PUNTIFORME

Questa impostazione si basa sul definire i campi come rappresentazioni del gruppo di Poincarè:

GRUPPO DI POINCARÈ = GRUPPO DI LORENTZ \oplus TRASLAZIONI SPAZIOTEMPORALI,

(A.1.1)

dove il gruppo di Lorentz è il gruppo delle trasformazioni di coordinate che lasciano inalterato $ds^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$, mentre le traslazioni spaziotemporali sono le trasformazioni di coordinate del tipo $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$ con a^μ costante.

Il gruppo di Lorentz è $SO(3,1)$ se siamo nello spazio di Minkowski, ma nello spazio euclideo diventa $SO(4)$:

$$SO(3,1) \rightarrow SO(4) = \underbrace{SU(2)}_m \otimes \underbrace{SU(2)}_n, \quad (A.1.2)$$

dove m ed n sono due numeri quantici che etichettano le rappresentazioni di $SU(2)$.

Pertanto possiamo descrivere le rappresentazioni del gruppo di Lorentz con quelle del gruppo $SU(2)$, e quindi indichiamo la rappresentazione del gruppo di Lorentz come (m, n) .

Il numero $m+n$ rappresenta lo spin della rappresentazione, che poi verrà interpretato come lo spin della particella.

Il gruppo di Lorentz ha sei generatori, che indichiamo come $M_{\mu\nu}$.

Invece le traslazioni spaziotemporali hanno quattro generatori, che sono i $P_\mu = -i\partial_\mu$.

Pertanto il gruppo di Poincarè ha $4+6=10$ generatori.

L'algebra di questi generatori è:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= -i\eta_{\mu\rho} P_\nu + i\eta_{\nu\rho} P_\mu \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - i\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - i\eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} + i\eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} \end{aligned} \quad (A.1.3)$$

Siamo interessati alle relazioni di commutazione perchè da esse possiamo vedere se siamo in grado di creare degli operatori, detti *operatori di Casimir*, che commutino con tutti i generatori dell'algebra.

Se un operatore commuta con tutti i generatori, allora esso è associato ad una buona grandezza fisica, dalla quale si può ricavare un buon numero quantico.

In altri termini, gli autovalori degli operatori di Casimir sono dei buoni numeri quantici e quindi ci permettono di classificare le particelle.

Nel nostro caso si dimostra che esistono due operatori di Casimir:

$$P^2 = P^\mu P_\mu, \quad W^2 = W^\mu W_\mu, \quad (A.1.4)$$

dove:

$$W^\mu \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma} \quad (A.1.5)$$

è detto *vettore di Pauli-Lubanski*.

Gli autovalori di P^2 sono $P^2 = m^2 \neq 0$ oppure $P^2 = 0$.

Se $P^2 = m^2$, allora gli autostati di W^2 sono della forma $-m^2 s(s+1)$, con $s=0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ che costituisce lo spin della rappresentazione.

Se fissiamo s , esistono diverse proiezioni possibili dello spin, rappresentate da un altro numero quantico: $m_s = -s, \dots, +s$.

La degenerazione è $2s+1$.

Ora associamo questa rappresentazione a particelle di massa m e spin s .

Invece, se $P^2=0$, ne segue allora che $W^2=0$, $P^\mu W_\mu=0$ e $W^\mu=\eta P^\mu$, con $\eta=\pm s$ che rappresenta la cosiddetta *elicità* della particella.

Quindi se $m=0$ la particella può avere solo 2 gradi di libertà.

Abbiamo quindi visto che il gruppo di Poincarè fornisce la massa e lo spin della particella.

Però le particelle sono individuate anche con altri numeri quantici: la carica elettrica, il numero barionico, la stranezza, ...: questi numeri quantici sono associati ad altri gruppi di simmetria, detti *gruppi di simmetria interna*, che non coinvolgono le coordinate spaziotemporali (a differenza del gruppo di Poincarè).

Abbiamo detto che i campi sono le rappresentazioni del gruppo di Poincarè, ed abbiamo visto come i numeri quantici m ed s della rappresentazione vengano interpretati come la massa e lo spin della particella.

Comunque in questa teoria il campo non descrive la particella, bensì descrive l'operatore che serve per fornire lo stato della particella.

A.2 L'IDENTITÀ DI WARD ED IL LEGAME TRA L'OPE E L'ALGEBRA DELLE CARICHE CONSERVATE

Consideriamo una generica teoria di campo con azione $S[\phi]$ in d dimensioni spaziotemporali, con $\phi_\alpha(x)$ che denota dei campi generici.

Sia R una regione dello spazio definito dalle d coordinate spaziotemporali x , e consideriamo un generico operatore locale $\mathcal{A}(x_0)$ in un punto x_0 dentro ad R .

È noto [2] che in questa teoria, in seguito ad una variazione $\delta\phi_\alpha(x)$ dei campi, vale la seguente relazione:

$$\delta\mathcal{A}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2\pi i} \int_R d^d x g^{1/2} \nabla_a j^a(x) \mathcal{A}(x_0) = 0, \quad (\text{A.2.1})$$

detta *identità di Ward* (qui j^a rappresenta la corrente della Noether, g la metrica dello spazio ed ε un parametro infinitesimo proporzionale alla variazione del campo $\delta\phi_\alpha(x)$).

Ora vogliamo esprimere questa identità in una forma molto comoda per lo studio delle teorie di campo conformi (trattate nell'appendice A.3).

Il teorema della divergenza dà:

$$\int_{\partial R} dA n_a j^a \mathcal{A}(x_0) = \frac{2\pi}{i\varepsilon} \delta\mathcal{A}(x_0), \quad (\text{A.2.2})$$

dove dA rappresenta l'elemento di area ed n^a il versore normale che punta verso l'esterno del bordo ∂R .

Considerando adesso il caso particolare di $d=2$ con spazio piatto, ed indichiamo con x_1 ed x_2 le due coordinate in questione.

In questo caso possiamo usare, invece delle coordinate reali x_1 ed x_2 , le coordinate complesse:

$$\begin{cases} z \equiv x_1 + ix_2 \\ \bar{z} \equiv x_1 - ix_2 \end{cases} \quad (\text{A.2.3})$$

Dato che stiamo lavorando su un piano in due dimensioni, anziché utilizzare le due coordinate reali x_1 ed x_2 , conviene utilizzare le due coordinate complesse (A.2.3), perché così è possibile utilizzare tutti i teoremi noti dall'analisi complessa, in particolare il teorema dei residui in questo paragrafo. In termini di queste due coordinate complesse, la (A.2.2) diventa:

$$\oint_{\partial R} j \mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0) dz - \oint_{\partial R} \bar{j} \mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0) d\bar{z} = \frac{2\pi}{\varepsilon} \delta \mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0), \quad (\text{A.2.4})$$

dove:

$$j \equiv \frac{1}{2}(j^1 - ij^2), \quad \bar{j} \equiv \frac{1}{2}(j^1 + ij^2). \quad (\text{A.2.5})$$

Nel caso in cui j e \bar{j} siano rispettivamente olomorfe ed antiolomorfe (come di solito si verifica nelle teorie invarianti sotto trasformazione conforme, definite nell'appendice A.3), l'integrale (A.2.4), per il teorema dei residui dell'analisi complessa, è dato da:

$$\underset{z \rightarrow z_0}{Res}(j(z) \mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0)) + \overline{\underset{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0}{Res}(\bar{j}(\bar{z}) \mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0))} = \frac{1}{i\varepsilon} \delta \mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0), \quad (\text{A.2.6})$$

dove 'Res' e ' \overline{Res} ' sono i coefficienti di $(z-z_0)^{-1}$ e $(\bar{z}-\bar{z}_0)^{-1}$ rispettivamente.

Questa forma dell'identità di Ward è particolarmente conveniente.

Ora vogliamo dimostrare che lo sviluppo in termini di potenze di z del prodotto degli operatori (detto OPE, acronimo di operator product expansion, e trattato in [2]) delle correnti determina l'algebra delle cariche conservate corrispondenti a tali correnti.

Consideriamo x_1 come coordinata spaziale ed x_2 come coordinate temporale.

Per eliminare qualsiasi divergenza infrarossa, compattifichiamo la coordinata spaziale: $x_1 \cong x_1 + 2\pi$.

Questo definisce un cilindro nelle coordinate x_1 ed x_2 .

Però questa volta, anziché usare le coordinate complesse definite prima con la (A.2.3), conviene usare le seguenti coordinate complesse:

$$\begin{cases} z = e^{-ix_1 + x_2} \\ \bar{z} = e^{ix_1 + x_2} \end{cases} \quad (\text{A.2.7})$$

In questo modo il cilindro viene mappato nel piano complesso z, \bar{z} .

Gli infiniti passato e futuro sul cilindro, cioè $x_2 = -\infty$ ed $x_2 = +\infty$, sono mappati nei punti del piano $z=0$ e $z=+\infty$ rispettivamente.

Le curve di tempo uguale sono definite da $x_2 = \text{cost.}$ e quindi sul piano complesso sono cerchi di raggio costante.

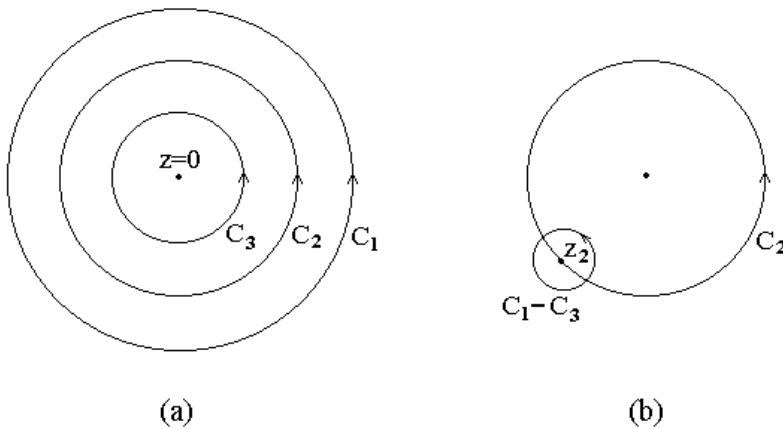
Consideriamo ora delle cariche generiche Q_i , con $i=1, 2$, date come integrali di contorno delle correnti olomorfe:

$$Q_i \{C\} = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} j_i. \quad (\text{A.2.8})$$

Consideriamo la combinazione:

$$Q_1 \{C_1\} Q_2 \{C_2\} - Q_1 \{C_3\} Q_2 \{C_2\}, \quad (\text{A.2.9})$$

dove i contorni sono mostrati nella seguente figura:



Quando si passa dall'interpretazione del path integral a quella degli operatori, quello che determina l'ordine degli operatori è il time ordering, che in questo caso è $t_1 > t_2 > t_3$.

Il path integral con la combinazione (A.2.9) così corrisponde ad un elemento di matrice di:

$$\hat{Q}_1 \hat{Q}_2 - \hat{Q}_2 \hat{Q}_1 \equiv [\hat{Q}_1, \hat{Q}_2]. \quad (\text{A.2.10})$$

Ricordiamo che il time ordering T è definito nel seguente modo:

$$T(A(x_1, x_2) B(x'_1, x'_2)) \equiv \begin{cases} A(x_1, x_2) B(x'_1, x'_2) & \text{se } x_2 > x'_2 \\ B(x'_1, x'_2) A(x_1, x_2) & \text{se } x_2 < x'_2 \end{cases} \quad (\text{A.2.11})$$

Siccome con le coordinate complesse che abbiamo scelto nella (A.2.7) il tempo determina il raggio delle curve $|z| = \text{costante}$, ne segue che nel nostro caso l'ordinamento temporale diventa un ordinamento radiale R:

$$R(A(z, \bar{z})B(z', \bar{z}')) \equiv \begin{cases} A(z, \bar{z})B(z', \bar{z}') & \text{se } |z| > |z'| \\ B(z', \bar{z}')A(z, \bar{z}) & \text{se } |z| < |z'| \end{cases} \quad (\text{A.2.12})$$

Ora, per un dato punto z_2 nel contorno C_2 , possiamo deformare la differenza dei contorni C_1 e C_3 , come mostrato nella figura precedente, cosicchè il commutatore è dato dal residuo dell'OPE:

$$[Q_1, Q_2]\{C_2\} = \oint_{C_2} \frac{dz_2}{2\pi i} \text{Res}_{z_1 \rightarrow z_2} j_1(z_1) j_2(z_2). \quad (\text{A.2.13})$$

Il metodo mostrato nella figura può essere applicato anche con la carica conservata $Q_2\{C_2\}$ sostituita da un operatore qualsiasi, il che dà:

$$[Q, \mathcal{A}(z_2, \bar{z}_2)] = \text{Res}_{z_1 \rightarrow z_2} j(z_1) \mathcal{A}(z_2, \bar{z}_2) = \frac{1}{i\epsilon} \delta \mathcal{A}(z_2, \bar{z}_2), \quad (\text{A.2.14})$$

dove all'ultimo passaggio abbiamo usato la (A.2.6).

Quindi abbiamo dimostrato che l'algebra è generata dall'OPE e che la carica Q genera la corrispondente trasformazione δ .

Cosa analoga vale nel caso antiolomorfo.

A.3 LA TEORIA DI CAMPO CONFORME IN DUE DIMENSIONI

Cominciamo con una breve introduzione [39][2] al gruppo conforme in d dimensioni.

Consideriamo un generico spazio d -dimensionale con tensore metrico $g_{\mu\nu}$.

L'elemento di linea di questo spazio è quindi $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

Sotto un cambio di coordinate $x \rightarrow x'$, il tensore metrico subisce la seguente trasformazione:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x), \quad (\text{A.3.1})$$

Per definizione, il gruppo conforme è il sottogruppo delle trasformazioni di coordinate che lasciano la metrica invariata, ad eccezione di un cambiamento di scala:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x). \quad (\text{A.3.2})$$

Di conseguenza le trasformazioni conformi sono tutte quelle trasformazioni di coordinate che preservano l'angolo:

$$\mathfrak{G} = \frac{v \cdot w}{\sqrt{v^2 w^2}}, \quad \text{dove} \quad v \cdot w = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu \quad \text{ed} \quad u^2 = u \cdot u, \quad (\text{A.3.3})$$

tra due vettori v, w dello spazio considerato.

Esprimiamo la generica trasformazione conforme infinitesima di coordinate attraverso $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$.

Quello che vogliamo fare è determinare la forma delle funzioni $\varepsilon^\mu(x)$ affinché queste soddisfino la (A.3.2), cioè affinché esse rappresentino effettivamente una trasformazione conforme (infinitesima).

Concentriamoci in particolare sullo spazio di Minkowski d -dimensionale M^d , che ha metrica piatta $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

Pertanto, sotto la trasformazione $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$, l'elemento di linea dello spazio diventa:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \rightarrow ds^2 + (\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu) dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.3.4})$$

dove abbiamo trascurato il termine $\partial\varepsilon\partial\varepsilon$ poiché esso è un infinitesimo di ordine superiore.

Per soddisfare la (A.3.2), dobbiamo richiedere che $\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu$ sia proporzionale ad $\eta_{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = \frac{2}{d} \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \varepsilon^\rho(x), \quad (\text{A.3.5})$$

dove la costante di proporzionalità si vede che è stata correttamente fissata prendendo la traccia (attraverso $\eta^{\mu\nu}$) di entrambi i lati della (A.3.5).

Comparando con la (A.3.2) si trova che:

$$\Omega(x) = 1 + \frac{2}{d} \partial^\rho \varepsilon_\rho(x). \quad (\text{A.3.6})$$

Inoltre dalla (A.3.5) ne segue anche che:

$$\left(\eta_{\mu\nu} \square^2 + (d-2) \partial_\mu \partial_\nu \right) (\partial^\rho \varepsilon_\rho) = 0. \quad (\text{A.3.7})$$

Per $d > 2$ questa equazione ammette come soluzione solo degli $\varepsilon(x)$ al più quadratici in x .

Per le soluzioni $\varepsilon(x)$ di ordine zero in x abbiamo:

a) $\varepsilon^\mu(x) = a^\mu = \text{costante}$, cioè le ordinarie traslazioni indipendenti da x ,

per le soluzioni di ordine uno:

b) $\varepsilon^\mu(x) = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$ (con ω antisimmetrico), cioè le rotazioni,

c) $\varepsilon^\mu(x) = \lambda x^\mu$, cioè le trasformazioni di scala,

mentre per soluzioni di ordine due abbiamo:

d) $\varepsilon^\mu(x) = b^\mu x^2 - 2x^\mu b_\nu x^\nu$, cioè le cosiddette *trasformazioni conformi speciali*.

Invece, per $d < 2$, la (A.3.7) ammette come soluzioni anche delle $\varepsilon(x)$ con dei termini di ordine superiore in x rispetto a quelli quadratici visti nel caso $d > 2$.

Infine, per $d=2$ e facendo $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \delta_{\mu\nu}$ (cioè effettuiamo il passaggio $M^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$), la (A.3.5) diventa:

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu(x) + \partial_\nu \varepsilon_\mu(x) = \delta_{\mu\nu} \partial_\rho \varepsilon^\rho(x), \quad (\text{A.3.8})$$

che nel caso di $\mu=1$ e $\nu=1$ dà:

$$\begin{aligned} \partial_1 \varepsilon_1(x) + \partial_1 \varepsilon_1(x) &= \delta_{11} \partial_\rho \varepsilon^\rho(x) = \partial_\rho \varepsilon^\rho(x) = \partial_1 \varepsilon^1(x) + \partial_2 \varepsilon^2(x) = \partial_1 \varepsilon_1(x) + \partial_2 \varepsilon_2(x), \\ \text{cioè} \quad \partial_1 \varepsilon_1(x) &= \partial_2 \varepsilon_2(x), \end{aligned} \quad (\text{A.3.9})$$

mentre nel caso di $\mu=1$ e $\nu=2$ dà:

$$\partial_1 \varepsilon_2(x) + \partial_2 \varepsilon_1(x) = \delta_{12} \partial_\rho \varepsilon^\rho(x) = 0, \quad \text{cioè} \quad \partial_1 \varepsilon_2(x) = -\partial_2 \varepsilon_1(x). \quad (\text{A.3.10})$$

Quindi abbiamo ottenuto:

$$\begin{cases} \partial_1 \varepsilon_1(x) = \partial_2 \varepsilon_2(x) \\ \partial_1 \varepsilon_2(x) = -\partial_2 \varepsilon_1(x) \end{cases} \quad (\text{A.3.11})$$

che altro non sono che le equazioni di Cauchy-Riemann dell'analisi complessa sul piano \mathbb{R}^2 .

È quindi naturale utilizzare:

$$\begin{cases} \varepsilon(z, \bar{z}) \equiv \varepsilon_1(z, \bar{z}) + i\varepsilon_2(z, \bar{z}) \\ \bar{\varepsilon}(z, \bar{z}) \equiv \varepsilon_1(z, \bar{z}) - i\varepsilon_2(z, \bar{z}) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} z \equiv x_1 + ix_2 \\ \bar{z} \equiv x_1 - ix_2 \end{cases} \quad (\text{A.3.12})$$

dove la barra rappresenta la coniugazione complessa.

La notazione $\varepsilon(z, \bar{z})$ (e così pure quella $\bar{\varepsilon}(z, \bar{z})$) può sembrare ridondante, siccome il valore di z determina quello di \bar{z} , ma è utile riservare la notazione $f(z)$ per i campi le cui equazioni del moto li rendono funzioni analitiche di z (è più usato il termine *olomorfe*), e la notazione $g(\bar{z})$ per quei campi le cui equazioni del moto li rendono funzioni analitiche di \bar{z} (cioè funzioni dette *antiolomorfe*).

In termini di queste nuove grandezze, la (A.3.11) diventa:

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}} \varepsilon = 0 \\ \partial_z \bar{\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon(z) \\ \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \end{cases} \quad (\text{A.3.13})$$

Quindi una trasformazione $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ in \mathbb{R}^2 è una trasformazione conforme se ε ed $\bar{\varepsilon}$ sono funzioni olomorfe ed antiolomorfe rispettivamente.

Questo permette di utilizzare i diversi teoremi dell'analisi complessa validi appunto per le funzioni analitiche, il che costituisce un grande vantaggio.

Uno di questi teoremi è la cosiddetta formula dello *sviluppo in serie di Laurent*, in base alla quale possiamo affermare che la più generale funzione analitica $\varepsilon(z)$ è della forma:

$$\varepsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_n z^{n+1}. \quad (\text{A.3.14})$$

Come si vede, la funzione $\varepsilon(z)$ dipende da infiniti parametri ε_n , da cui si deduce che, per $d=2$, il gruppo conforme è infinito-dimensionale.

Quindi le trasformazioni conformi $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ di \mathbb{R}^2 sono generate da funzioni olomorfe ed antiolomorfe nel piano complesso \mathbb{C} , cioè:

$$\text{GRUPPO CONFORME} = G \otimes \bar{G} \quad (\text{A.3.15})$$

dove G rappresenta il gruppo delle trasformazioni olomorfe di \mathbb{C} e \bar{G} il gruppo delle trasformazioni antiolomorfe di \mathbb{C} .

La trasformazione conforme $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$, espressa in termini delle coordinate complesse, è:

$$\begin{cases} z \rightarrow z' = z + \varepsilon(z) \\ \bar{z} \rightarrow \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \end{cases} \quad (\text{A.3.16})$$

La (A.3.16) può essere scritta nel seguente modo:

$$z \rightarrow z' = \left(e^{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_n z^{n+1} \partial_z} \right) \circ z, \quad \text{poichè} \quad \left(e^{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_n z^{n+1} \partial_z} \right) \circ z = z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_n z^{n+1} = z + \varepsilon(z). \quad (\text{A.3.17})$$

Quest'ultima scrittura della trasformazione conforme è utile in quanto da essa ne segue che i generatori del gruppo conforme sono gli operatori:

$$l_n = -z^{n+1} \partial_z. \quad (\text{A.3.18})$$

L'algebra di questi generatori è:

$$\begin{aligned} [l_m, l_n] &= l_m l_n - l_n l_m = (-z^{m+1} \partial_z)(-z^{n+1} \partial_z) - (-z^{n+1} \partial_z)(-z^{m+1} \partial_z) = \\ &= z^{m+1} \left((n+1) z^n \partial_z + z^{n+1} \partial_z^2 \right) - z^{n+1} \left((m+1) z^m \partial_z + z^{m+1} \partial_z^2 \right) = \\ &= (n-m) z^{m+n+1} \partial_z = (m-n) (-z^{m+n+1} \partial_z) = (m-n) l_{m+n}, \end{aligned} \quad (\text{A.3.19})$$

nota con il nome di *algebra di Virasoro*.

Tutto quello che abbiamo esposto finora in questo paragrafo non è una teoria di campo, dato che finora non abbiamo mai accennato all'esistenza di campi.

Siccome sono i campi che possono essere classici o quantistici, non ha senso domandarsi se quest'algebra è classica o quantistica.

Vedremo invece che, nell'ambito di una generica teoria di campo con invarianza conforme in due dimensioni, le componenti della carica conservata che genera le trasformazioni conformi dei campi soddisfano, a livello classico, la stessa algebra di Virasoro appena trovata, mentre a livello quantistico quest'algebra deve essere corretta (cioè in questo ambito ha invece senso domandarsi se l'algebra è classica o quantistica, perchè siamo in una teoria di campo).

Quindi ora cominciamo con il considerare una generica teoria di campo con invarianza conforme in due dimensioni, cioè consideriamo un cosiddetto *modello sigma*.

Questo significa che introduciamo dei campi ϕ_a , dipendenti da due coordinate reali x_1 ed x_2 (vedremo x_1 come la coordinata spaziale ed x_2 come la coordinata temporale), il cui comportamento è determinato da una generica azione $S[\phi_a]$ che è invariante sotto trasformazione conforme delle coordinate x_1 ed x_2 (cioè sotto la trasformazione definita in precedenza con la (A.3.2)) combinata con la trasformazione $\delta\phi_a$ dei campi (che calcoliamo successivamente) determinata da questa trasformazione conforme delle coordinate.

Ora rifacciamo le operazioni viste nel paragrafo A.2, cioè, compattifichiamo la coordinata spaziale: $x_1 \cong x_1 + 2\pi$, il che ci permette di eliminare qualsiasi divergenza infrarossa.

Questo definisce un cilindro nelle coordinate x_1 ed x_2 .

Inoltre, dato che stiamo lavorando su un piano in due dimensioni, anziché utilizzare le due coordinate reali x_1 ed x_2 , conviene utilizzare le due coordinate complesse, perché così è possibile utilizzare tutti i teoremi noti dall'analisi complessa, i quali risulteranno essere molto utili in questo ambito.

Però questa volta, anziché usare le coordinate complesse definite prima con la (A.3.12), conviene usare le seguenti coordinate complesse:

$$\begin{cases} z = e^{-ix_1 + x_2} \\ \bar{z} = e^{ix_1 + x_2} \end{cases} \quad (\text{A.3.20})$$

(collegate alle coordinate (A.3.12) da una trasformazione conforme).

In questo modo il cilindro viene mappato nel piano complesso z, \bar{z} .

Per il teorema della Noether, la suddetta simmetria dell'azione è associata ad una carica conservata Q della teoria, che per l'identità di Ward genera (vedere la (A.2.14)) la trasformazione conforme dei campi ϕ_a (e cioè determina la variazione subita dai campi ϕ_a in seguito ad una trasformazione conforme delle coordinate z e \bar{z}):

$$\delta_\varepsilon \phi_a(z, \bar{z}) = i\varepsilon [Q, \phi_a(z, \bar{z})], \quad (\text{A.3.21})$$

dove con ε intendiamo un numero reale infinitesimo tale che:

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) &= \varepsilon v(z) \\ \bar{\varepsilon}(\bar{z}) &= \varepsilon \bar{v}(\bar{z}). \end{aligned} \quad (\text{A.3.22})$$

Nel caso particolare in cui la simmetria dell'azione sia quella sotto trasformazione conforme (che è quella che interessa a noi), la corrente della Noether ad essa associata è $j_\mu = T_{\mu\nu}\epsilon^\nu$ (con $\mu, \nu = 1, 2$), dove:

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{\sqrt{-\det g_{\mu\nu}}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad \mu, \nu = 1, 2. \quad (\text{A.3.23})$$

è il tensore energia-impulso.

Pertanto in questo caso la carica conservata Q , convertita poi al caso delle coordinate complesse, diventa:

$$Q = \frac{\epsilon}{2\pi i} \left[\oint dz T(z) v(z) + \oint d\bar{z} \bar{T}(\bar{z}) \bar{v}(\bar{z}) \right], \quad (\text{A.3.24})$$

dove:

$$\begin{aligned} T(z) \equiv T_{zz} &= \frac{1}{4} [T_{11} - T_{22} + i(T_{12} + T_{21})] \\ \bar{T}(\bar{z}) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{1}{4} [T_{11} - T_{22} - i(T_{12} + T_{21})] \end{aligned} \quad (\text{A.3.25})$$

sono le componenti olomorfe ed antiolomorfe del tensore energia impulso.

Per vedere che T_{zz} è olomorfa (da cui ne segue, per coniugazione complessa, che $T_{\bar{z}\bar{z}}$ è antiolomorfa), cominciamo con l'osservare che il tensore energia impulso ha traccia nulla.

Infatti, nel caso particolare in cui la trasformazione conforme sia una trasformazione di scala (cioè $\epsilon^\mu(x) = \lambda x^\mu$), la corrente della Noether associata alla simmetria dell'azione sotto tale trasformazione è $j_\mu = T_{\mu\nu} x^\nu$, e quindi in questo caso particolare si ha che $\partial_\nu j^\nu = T^\mu{}_\mu$.

Pertanto la legge di conservazione $\partial_\nu j^\nu = 0$ derivante dalla simmetria dell'azione comporta che $T^\mu{}_\mu = 0$, cioè che il tensore energia-impulso abbia traccia nulla.

Osserviamo inoltre che $T_{\mu\nu}$ è simmetrico, come si vede dalla sua espressione (A.3.23).

Pertanto ne segue che:

$$T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4} (T_{11} + T_{22} - i(T_{12} - T_{21})) = \frac{1}{4} (T_{11} + T_{22} - i \cdot 0) = \frac{1}{4} (T_{11} + T_{22}) = \frac{1}{4} T^\mu{}_\mu = 0. \quad (\text{A.3.26})$$

Inoltre, la legge di conservazione $g^{\alpha\mu} \partial_\alpha T_{\mu\nu} = 0$ del tensore energia impulso fornisce due relazioni:

$$\partial_{\bar{z}} T_{zz} + \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad \partial_z T_{zz} + \partial_{\bar{z}} T_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad (\text{A.3.27})$$

che unite alla (A.3.26) danno:

$$\partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0, \quad \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad (\text{A.3.28})$$

da cui si vede che T_{ZZ} è olomorfa e che $T_{\bar{Z}\bar{Z}}$ è antiolomorfa.

Ricordando la (A.3.22) e la (A.3.14), ne segue che la carica Q (A.3.24) può essere espressa nel modo seguente:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2\pi i} \left[\oint dz T(z) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_n z^{n+1} + \oint d\bar{z} \bar{T}(\bar{z}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{\varepsilon}_n \bar{z}^{n+1} \right] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\varepsilon_n \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z) + \bar{\varepsilon}_n \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}) \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varepsilon_n L_n + \bar{\varepsilon}_n \bar{L}_n), \end{aligned} \quad (\text{A.3.29})$$

dove:

$$L_n \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z), \quad \bar{L}_n \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}). \quad (\text{A.3.30})$$

Questi sono detti *generatori di Virasoro*, perchè a livello classico si dimostra che essi soddisfano l'algebra di Virasoro (A.3.19) vista in precedenza (quest'algebra comunque non è da confondere con quella (A.3.19), poichè quella era l'algebra dei generatori l_n della trasformazione conforme delle coordinate, mentre questa è l'algebra dei generatori L_n della trasformazione dei campi causata dalla trasformazione conforme delle coordinate).

Quello che vogliamo determinare ora è proprio quest'algebra.

Prima però ricordiamo che nel caso quantistico le grandezze che entrano in gioco nell'identità di Ward devono essere intese come operatori, oppure devono essere inserite nel path integral, per esprimere il fatto che esse sono quantistiche.

Inoltre nel caso quantistico bisogna usare il normal ordering, al fine di eliminare le singolarità che si producono quando si quantizzano i campi.

Quindi il path integral ed il normal ordering introducono l'informazione che la teoria è quantistica, e comportano un'alterazione dell'algebra dei generatori L_n rispetto al caso classico.

Qui ci dedicheremo solamente al calcolo del caso quantistico e pertanto dobbiamo determinare:

$$\langle [L_m, L_n] \rangle = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int [\mathcal{D} X] L_m(r=|z|+\delta) L_n(z) e^{-iS} - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int [\mathcal{D} X] L_m(r=|z|-\delta) L_n(z) e^{-iS},$$

(A.3.31)

dove abbiamo usato il fatto che il time ordering, in seguito alla trasformazione (A.3.20), diventa un radial ordering.

Usando ora la (A.3.30), si ottiene che la (A.3.31) diventa:

$$\begin{aligned}
\langle [L_m, L_n] \rangle &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int e^{-iS} [\mathcal{D} X] \left[\oint_{C_3} \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} T(z) \oint_{C_2} \frac{dz'}{2\pi i} z'^{m+1} T(z') - \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} T(z) \oint_{C_2} \frac{dz'}{2\pi i} z'^{m+1} T(z') \right] = \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int e^{-iS} [\mathcal{D} X] \left[\oint_{C_2} \oint_{C_3} \frac{dz dz'}{(2\pi i)^2} z^{m+1} z'^{m+1} T(z) T(z') - \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{dz dz'}{(2\pi i)^2} z^{m+1} z'^{m+1} T(z) T(z') \right] = \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int e^{-iS} [\mathcal{D} X] \left[\oint_{C_2} \left(\oint_{C_3} - \oint_{C_1} \right) \frac{dz dz'}{(2\pi i)^2} z^{m+1} z'^{m+1} T(z) T(z') \right].
\end{aligned}$$

(A.3.32)

dove C_1 , C_2 e C_3 sono i cerchi di raggio r rispettivamente pari a $|z|-\delta$, $|z|$ e $|z|+\delta$.

In modo analogo a quanto visto nel paragrafo A.2, è possibile deformare i due cammini C_1 e C_3 in modo che, per $\delta \rightarrow 0$, si abbia:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\oint_{C_3} - \oint_{C_1} \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \oint_{C_{z,\delta}} \quad , \quad (\text{A.3.33})$$

dove $C_{z,\delta}$ rappresenta il cerchio di raggio δ e centrato in z .

Quindi la (A.3.32) diventa:

$$\begin{aligned}
\langle [L_m, L_n] \rangle &= \int e^{-iS} [\mathcal{D} X] \left[\oint_{C_2} dz' \lim_{\delta \rightarrow 0} \oint_{C_{z,\delta}} \frac{dz}{(2\pi i)^2} z^{m+1} z'^{m+1} T(z) T(z') \right] = \\
&= \int e^{-iS} [\mathcal{D} X] \left[\oint_{C_2} \frac{dz'}{(2\pi i)^2} 2\pi i \operatorname{Res}_{z \rightarrow z'} (z^{m+1} z'^{m+1} T(z) T(z')) \right] = \\
&= \oint_{C_2} \frac{dz'}{2\pi i} \operatorname{Res}_{z \rightarrow z'} (z^{m+1} z'^{m+1} \int e^{-iS} [\mathcal{D} X] T(z) T(z')) = \oint_{C_2} \frac{dz'}{2\pi i} \operatorname{Res}_{z \rightarrow z'} (z^{m+1} z'^{m+1} \langle T(z) T(z') \rangle).
\end{aligned} \quad (\text{A.3.34})$$

Da qui si vede che ora ci occorre conoscere $\langle T(z) T(z') \rangle$.

In realtà è sufficiente conoscere, ai fini del calcolo del residuo, solo la parte singolare (e cioè i poli) di $\langle T(z) T(z') \rangle$, cioè è sufficiente conoscere l'OPE di $T(z)$ con sè stesso.

Si dimostra che la parte singolare di $\langle T(z) T(z') \rangle$ in generale (cioè indipendentemente dalla forma dell'azione S e dai campi ϕ_a della teoria, purchè essa sia invariante sotto trasformazione conforme) è:

$$\langle T(z) T(z') \rangle \sim \frac{c/2}{(z-z')^4} + \frac{2}{(z-z')^2} T(z') + \frac{1}{z-z'} \partial T(z'). \quad (\text{A.3.35})$$

dove c è un coefficiente costante noto come *carica centrale*.

Il suo valore in generale dipende dalla particolare teoria che si sta considerando (cioè dalla forma dell'azione S e dai campi ϕ_a della teoria).

Considerazioni identiche valgono per l'OPE di $\bar{T}(\bar{z})$ con sè stesso, cosicchè:

$$\langle \bar{T}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{z}') \rangle \sim \frac{\bar{c}/2}{(\bar{z} - \bar{z}')^4} + \frac{2}{(\bar{z} - \bar{z}')^2} \bar{T}(\bar{z}') + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}'} \partial \bar{T}(\bar{z}'), \quad (\text{A.3.36})$$

dove \bar{c} è in principio una costante indipendente da c .

Si dimostra inoltre che una teoria con una funzione a due punti $\langle T_{\mu\nu}(\mathbf{p}) T_{\alpha\beta}(-\mathbf{p}) \rangle$ Lorentz-invariante richiede che sia $c = \bar{c}$.

Usando la (A.3.35) si osserva quindi che:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z \rightarrow z'} \left(z^{n+1} z^{m+1} \langle T(z) T(z') \rangle \right) &= \text{Res}_{z \rightarrow z'} \left[z^{m+1} z^{m+1} \left(\frac{c/2}{(z-z')^4} + \frac{2}{(z-z')^2} T(z') + \frac{1}{z-z'} \partial T(z') \right) \right] = \\ &= \frac{c}{12} (\partial^3 z^{m+1}) z^{m+1} + 2 (\partial z^{m+1}) z^{m+1} T(z') + z^{m+n+2} \partial T(z') = \\ &= \frac{c}{12} (m^3 - m) z^{m+n-1} + (m-n) z^{m+n+1} T(z') + \text{derivata totale}. \end{aligned} \quad (\text{A.3.37})$$

Inserendo questo risultato nella (A.3.34), si ottiene quindi che:

$$\begin{aligned} \langle [L_m, L_n] \rangle &= \oint_{C_2} \frac{dz'}{2\pi i} \left[\frac{c}{12} (m^3 - m) z^{m+n-1} + (m-n) z^{m+n+1} T(z') + \text{derivata totale} \right] = \\ &= (m-n) \oint_{C_2} \frac{dz'}{2\pi i} z^{m+n+1} T(z') + \frac{c}{12} (m^3 - m) \oint_{C_2} \frac{dz'}{2\pi i} z^{m+n-1} = \\ &= (m-n) L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m,-n}, \end{aligned} \quad (\text{A.3.38})$$

dove al secondo passaggio abbiamo usato il fatto che l'integrale di una derivata totale fa zero, mentre al terzo passaggio abbiamo usato la (A.3.30).

Questa è la cosiddetta *algebra di Virasoro quantistica*.

I generatori \bar{L}_m soddisfano la stessa algebra, ma con carica centrale \bar{c} .

L'invarianza conforme impone dei forti vincoli sulla forma degli OPE, ed in particolare sulla forma degli OPE del tensore energia-impulso.

Consideriamo l'OPE di $T(z)$ con un generico operatore \mathcal{A} .

Si dimostra [2] che questo OPE è in generale della forma di una espansione di Laurent, e quindi presenta anche delle potenze (interi) negative di z .

Siccome per il calcolo dei residui interessano solamente questi termini singolari dell'OPE, allora consideriamo solamente il pezzo:

$$T(z) \mathcal{A}(0,0) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \mathcal{A}^{(n)}(0,0), \quad (\text{A.3.39})$$

dell'OPE, ed in modo simile per $\bar{T}(\bar{z})$.

I coefficienti $\mathcal{A}^{(n)}$ devono essere determinati.

Quello che vogliamo dimostrare è che questi coefficienti sono determinati dalla trasformazione conforme dell'operatore \mathcal{A} .

Sotto una trasformazione conforme infinitesima $z' = z + \varepsilon v(z)$, un polo semplice in $v(z)T(z)\mathcal{A}(0,0)$ si forma quando il termine z^{-n-1} dell'OPE $T\mathcal{A}$ moltiplica il termine di ordine z^n in $v(z)$.

Pertanto, l'identità di Ward (A.2.6) implica che:

$$\delta \mathcal{A}(z, \bar{z}) = -\varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left[\partial^n v(z) \mathcal{A}^{(n)}(z, \bar{z}) + \bar{\partial}^n v(z)^* \bar{\mathcal{A}}^{(n)}(z, \bar{z}) \right]. \quad (\text{A.3.40})$$

Così si vede che gli operatori $\mathcal{A}^{(n)}$ sono determinati dalla trasformazione conforme di \mathcal{A} .

È conveniente usare una base di operatori locali che siano autostati sotto la seguente trasformazione rigida:

$$z' = \zeta z, \quad (\text{A.3.41})$$

dove ζ è un generico numero complesso costante (questa è una particolare trasformazione conforme, dove la fase di ζ causa una rotazione del sistema, mentre il suo modulo causa un riscaldamento della dimensione del sistema).

Cioè è conveniente usare una base di operatori locali tali che:

$$\mathcal{A}'(z', \bar{z}') = \zeta^{-h} \bar{\zeta}^{-\bar{h}} \mathcal{A}(z, \bar{z}). \quad (\text{A.3.42})$$

I numeri reali h ed \bar{h} (dove \bar{h} non rappresenta il complesso coniugato di h : i due numeri sono indipendenti) sono noti come pesi conformi di \mathcal{A} .

La somma $h + \bar{h}$ è la dimensione di \mathcal{A} e ne determina il comportamento sotto riscaldamento, mentre $h - \bar{h}$ è lo spin di \mathcal{A} e ne determina il comportamento sotto rotazioni.

L'identità di Ward per la trasformazione (A.3.42) e per la traslazione $\delta \mathcal{A} = -v^a \partial_a \mathcal{A}$ determina parte dell'OPE:

$$T(z)\mathcal{A}(0,0) = \dots + \frac{h}{z^2} \mathcal{A}(0,0) + \frac{1}{z} \partial \mathcal{A}(0,0) + \dots, \quad (\text{A.3.43})$$

ed in modo simile per $\bar{T}(\bar{z})$.

Un importante caso speciale è quello di *operatore tensoriale*, detto anche *campo primario* \mathcal{O} , sul quale una generica trasformazione conforme agisce nel seguente modo:

$$\mathcal{O}'(z', \bar{z}') = (\partial_z z')^{-h} (\partial_{\bar{z}} \bar{z}')^{-\bar{h}} \mathcal{O}(z, \bar{z}). \quad (\text{A.3.44})$$

In questo caso speciale l'OPE (A.3.39) si riduce a:

$$T(z)\mathcal{O}(0,0) = \frac{h}{z^2}\mathcal{O}(0,0) + \frac{1}{z}\partial\mathcal{O}(0,0) + \dots, \quad (\text{A.3.45})$$

cioè i termini con singolarità di ordine maggiore a due sono assenti.

Quindi abbiamo visto che i coefficienti dell'OPE di T con \mathcal{A} vengono determinati dalla trasformazione conforme di \mathcal{A} .

Al contrario, se è noto l'OPE di T con \mathcal{A} , possiamo determinare la trasformazione conforme di \mathcal{A} .

In particolare, sapendo che l'OPE di T(z) con sè stesso è dato dalla (A.3.35), ne segue allora che la trasformazione conforme di T(z) è:

$$\delta T(z) = -\frac{c}{12}\frac{\partial^3}{\partial z^3}v(z) - v(z)\partial T(z) - 2\partial v(z)T(z). \quad (\text{A.3.46})$$

Questo risultato è importante nel calcolo dell'anomalia quantistica della teoria conforme.

Tutto questo vale nel caso di una teoria con la coordinata spaziale compattificata: $x_1 \cong x_1 + 2\pi$.

Da questa teoria è possibile costruire anche una teoria nella quale x_1 varia solamente da 0 a π , senza compattificazione.

Infatti lo spazio della teoria senza compattificazione può essere visto come un cilindro (cioè lo spazio della teoria compattificata) tagliato del quale se ne prende solo la metà.

Quindi da qui si vede che lo spazio della teoria senza compattificazione è la metà di quello della teoria compattificata.

Per questa nuova teoria si usano le coordinate complesse:

$$\begin{aligned} z &= -e^{-i\sigma^1 + \sigma^2} \\ \bar{z} &= -e^{i\sigma^1 + \sigma^2} \end{aligned} \quad (\text{A.3.47})$$

Queste differiscono dalle coordinate (A.3.20) a causa di un segno meno.

Per $x_1=0$ ed $x_1=\pi$ si ha che $z = -\exp(-ix_1 + x_2)$ è reale (al variare del tempo x_2 da $-\infty$ a $+\infty$), e quindi il bordo del mezzo cilindro viene mappato sull'asse reale del piano complesso.

Il segno meno nelle coordinate (A.3.47) serve per mappare la coordinata $x_1=0$ sulla parte negativa dell'asse reale e la coordinata $x_1=\pi$ sulla parte positiva..

Si vede che $0 \leq x_1 \leq \pi \Leftrightarrow \text{Im}z \geq 0$, e quindi lo spazio della teoria senza compattificazione è la metà del piano complesso, cioè la metà dello spazio della teoria compattificata (come doveva essere, per quanto detto prima in termini delle coordinate x_1 ed x_2).

Sul bordo dello spazio definito dalle coordinate reali x_1 ed x_2 , cioè sulle due curve descritte da $x_1=0$ ed $x_1=\pi$ al variare di x_2 da $-\infty$ a $+\infty$, il tensore energia impulso di questa nuova teoria soddisfa:

$$T_{\mu\nu}n^\mu t^\nu = 0, \quad (\text{A.3.48})$$

dove n^μ e t^ν sono i vettori normale e tangente al bordo in questione.

Per vedere questo, consideriamo un sistema di coordinate nel quale il bordo è diritto.

La presenza del bordo rompe l'invarianza per traslazioni nella direzione normale, ma non in quella tangente, così la corrente $T_{\mu\nu}t^\nu$ è ancora conservata.

Allora la condizione al contorno (A.3.48) corrisponde a dire che il flusso di questa corrente fuori dal bordo è nullo.

In termini delle coordinate (A.3.47) questo diventa:

$$T_{zz} = T_{\bar{z}\bar{z}}, \quad \text{Im } z = 0. \quad (\text{A.3.49})$$

È conveniente usare ora il cosiddetto *doubling trick*.

Definiamo T_{ZZ} nel semipiano z inferiore come il valore di $T_{\bar{z}\bar{z}}$ alla sua immagine nel semipiano z superiore, $z' = \bar{z}$:

$$T_{zz}(z) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}'), \quad \text{Im } z < 0. \quad (\text{A.3.50})$$

L'equazione del moto e le condizioni al contorno sono allora sintetizzate dall'affermazione che T_{ZZ} è olomorfo nell'intero piano complesso.

Esiste solamente un set di generatori di Virasoro, perchè le condizioni al contorno accoppiano T e \bar{T} :

$$L_m = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_C dz z^{m+1} T_{zz} - \int_C d\bar{z} \bar{z}^{m+1} T_{\bar{z}\bar{z}} \right) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{m+1} T_{zz}(z). \quad (\text{A.3.51})$$

Qui C rappresenta un semicerchio centrato nell'origine.

Nel secondo passaggio della (A.3.51) abbiamo usato il doubling trick per scrivere L_m in termini di un contorno chiuso.

Ancora, questi generatori L_m soddisfano l'algebra di Virasoro (A.3.38).

A.4 QUANTIZZAZIONE BRST

Per considerare la variazione più generale possibile della condizione di gauge, dobbiamo supporre che δg_{ab} sia un *operatore*, cioè che esso dipenda dai campi nel path-integral [2].

Allo scopo di derivare la condizione d'invarianza completa, è utile prendere un punto di vista più generale ed astratto.

Consideriamo un path-integral con una simmetria locale, cioè con una invarianza di gauge.

I campi del path-integral sono denotati con ϕ_i , che nel caso presente rappresenta $X^\mu(\sigma)$ e $g_{ab}(\sigma)$.

Qui usiamo una notazione molto condensata, dove "i" etichetta i campi e rappresenta *anche* la coordinata σ .

La variazione di gauge è $\varepsilon^\alpha \delta_\alpha$, dove α ancora include le coordinate.

Per assunzione i parametri di gauge ε^α sono reali, siccome possiamo sempre separare un parametro complesso nelle sue parti reale ed immaginaria.

Le trasformazioni di gauge soddisfano un'algebra:

$$[\delta_\alpha, \delta_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma \delta_\gamma. \quad (\text{A.4.1})$$

Ora fissiamo il gauge attraverso le condizioni:

$$F^A(\phi) = 0, \quad (\text{A.4.2})$$

dove ancora una volta A include le coordinate.

Seguendo la stessa procedura di Faddeev-Popov usata nel paragrafo 2.3 per la quantizzazione funzionale della stringa, il path-integral diventa:

$$\int \frac{[d\phi_i]}{V_{gauge}} \exp(-S_1) \rightarrow \int [d\phi_i dB_A db_A dc^\alpha] \exp(-S_1 - S_2 - S_3), \quad (\text{A.4.3})$$

dove S_1 è l'originale azione gauge-invariante, S_2 è l'azione di gauge-fixing:

$$S_2 = -iB_A F^A(\phi), \quad (\text{A.4.4})$$

ed S_3 è l'azione di Faddeev-Popov:

$$S_3 = b_A c^\alpha \delta_\alpha F^A(\phi). \quad (\text{A.4.5})$$

Abbiamo introdotto il campo B_A per produrre una rappresentazione integrale del gauge-fixing $\delta(F^A)$.

Ci sono due cose da notare riguardo a questa azione.

La prima è che essa è invariante sotto la cosiddetta trasformazione di Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST):

$$\begin{aligned} \delta_B \phi_i &= -i\varepsilon c^\alpha \delta_\alpha \phi_i, \\ \delta_B B_A &= 0, \\ \delta_B b_A &= \varepsilon B_A, \\ \delta_B c^\alpha &= \frac{i}{2} \varepsilon f_{\beta\gamma}^\alpha c^\beta c^\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.4.6})$$

Questa trasformazione mescola oggetti commutanti ed anticommutanti, cosicché ε debba essere preso anticommutante.

c^α è un ghost number conservato, che è +1 per c^α , -1 per b_A ed ε , e 0 per tutti gli altri campi.

L'azione originale S_1 è invariante di per sè, perchè l'azione di δ_B su ϕ_i è giusto una trasformazione di gauge con parametro $i\varepsilon c^\alpha$.

La variazione di S_2 cancella la variazione di b_A in S_3 , mentre le variazioni di $\delta_\alpha F^A$ e c^α in S_3 si cancellano tra di loro.

La seconda proprietà chiave è che:

$$\begin{aligned}\delta_B (b_A F^A(\phi)) &= (\delta_B b_A) F^A(\phi) + b_A (\delta_B F^A(\phi)) = (\varepsilon B_A) F^A(\phi) + b_A (i\varepsilon c^\alpha \delta_\alpha F^A(\phi)) = \\ &= i\varepsilon (-iB_A F^A) + i\varepsilon (b_A c^\alpha \delta_\alpha F^A) = i\varepsilon (S_2 + S_3),\end{aligned}\quad (\text{A.4.7})$$

dove al secondo passaggio abbiamo usato la prima e la terza equazione della (A.4.6), mentre all'ultimo passaggio abbiamo usato le (A.4.4) ed (A.4.5).

Ora consideriamo un piccolo cambiamento δF nella condizione di gauge-fixing (A.4.2).

Il cambiamento nell'azione di gauge-fixing (A.4.4) e nell'azione di ghost (A.4.5) dà:

$$\varepsilon \delta \langle f | i \rangle = i \langle f | \delta_B (b_A \delta F^A) | i \rangle = -\varepsilon \langle f | \{ Q_B, b_A \delta F^A \} | i \rangle, \quad (\text{A.4.8})$$

dove al primo passaggio abbiamo usato la (A.4.7), mentre al secondo passaggio abbiamo scritto la variazione BRST come un anticommutatore con la corrispondente carica conservata Q_B .

Quindi, gli stati fisici devono soddisfare:

$$\langle \psi | \{ Q_B, b_A \delta F^A \} | \psi' \rangle = 0. \quad (\text{A.4.9})$$

Affinchè questo valga per δF arbitrari, deve essere che:

$$Q_B | \psi \rangle = Q_B | \psi' \rangle = 0. \quad (\text{A.4.10})$$

Infatti questo lo si vede dal fatto che la (A.4.9) può anche essere scritta nel seguente modo:

$$\begin{aligned}0 &= \langle \psi | \{ Q_B, b_A \delta F^A \} | \psi' \rangle = \langle \psi | Q_B b_A \delta F^A | \psi' \rangle + \langle \psi | b_A \delta F^A Q_B | \psi' \rangle = \\ &= (Q_B^\dagger | \psi \rangle)^\dagger b_A \delta F^A | \psi' \rangle + \langle \psi | b_A \delta F^A (Q_B | \psi' \rangle) = (Q_B | \psi \rangle)^\dagger b_A \delta F^A | \psi' \rangle + \langle \psi | b_A \delta F^A (Q_B | \psi' \rangle),\end{aligned}$$

(A.4.11)

dove all'ultimo passaggio abbiamo assunto che $Q_B^\dagger = Q_B$ (ci sono diversi modi per vedere che questa relazione deve essere vera. Un modo è rappresentato dal fatto che se fosse $Q_B^\dagger \neq Q_B$, allora Q_B^\dagger avrebbe qualche altra simmetria, ma non vi è candidato. Un argomento migliore è che i campi c^α e b_A sono come versioni anticommutanti del parametro di gauge ε^α e del moltiplicatore di Lagrange B_A , e quindi ereditano le loro proprietà di realtà).

La (A.4.10) è la condizione essenziale: *gli stati fisici devono essere BRST-invarianti*.

Indicando con M^{AB} una generica matrice costante, potremmo anche aggiungere all'azione un termine proporzionale a:

$$\varepsilon^{-1} \delta_B (b_A B_B M^{AB}) = \varepsilon^{-1} ((\delta_B b_A) B_B + b_A (\delta_B B_B)) M^{AB} = \varepsilon^{-1} (\varepsilon B_A B_B + b_A \cdot 0) M^{AB} = B_A B_B M^{AB},$$

(A.4.12)

dove al primo passaggio abbiamo usato il fatto che M^{AB} è costante, mentre al secondo passaggio abbiamo usato la seconda e la terza equazione della (A.4.6).

Per il precedente argomento, le ampiezze $\langle f|i \rangle$ tra stati fisici non sono alterate da questo termine aggiunto.

L'integrale sopra B_A ora produce una gaussiana anzichè una funzione delta: questi sono i cosiddetti *gauge mediati con gaussiane*.

C'è un'idea chiave in più.

Allo scopo di muoversi nello spazio delle scelte di gauge, la carica BRST deve rimanere conservata. Così essa deve commutare con il cambiamento nell'hamiltoniana (poichè l'hamiltoniana è il generatore delle traslazioni, e cioè dei movimenti effettuati sullo spazio delle scelte di gauge):

$$\begin{aligned} 0 &= [Q_B, \{Q_B, b_A \delta F^A\}] = Q_B^2 b_A \delta F^A - Q_B b_A \delta F^A Q_B + Q_B b_A \delta F^A Q_B - b_A \delta F^A Q_B^2 = \\ &= Q_B^2 b_A \delta F^A - b_A \delta F^A Q_B^2 = [Q_B^2, b_A \delta F^A], \end{aligned} \quad (\text{A.4.13})$$

dove al primo passaggio abbiamo usato semplicemente la definizione di $[\dots]$ e $\{\dots\}$.

Affinchè questa espressione si annulli per generici cambiamenti di gauge δF^A , ci occorre che sia:

$$Q_B^2 = 0. \quad (\text{A.4.14})$$

Cioè la carica BRST è nilpotente; la possibilità $Q_B^2 = \text{costante}$ è esclusa perchè Q_B^2 ha ghost number 2.

Si può verificare che agendo due volte con la trasformazione BRST (A.4.6) lascia tutti i campi invariati.

In particolare:

$$\delta_B (\delta_B c^\alpha) = -\frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon^\gamma f_{\beta\gamma}^\alpha f_{\delta\varepsilon}^\gamma c^\beta c^\delta c^\varepsilon = 0. \quad (\text{A.4.15})$$

Il prodotto dei ghosts è antisimmetrico sugli indici $\beta, \delta, \varepsilon$, ed il prodotto di costanti di struttura poi si annulla per l'identità di Jacobi.

Si osserva che la nilpotenza di Q_B ha un'importante conseguenza.

Uno stato della forma:

$$Q_B |\chi\rangle \quad (\text{A.4.16})$$

sarà annichilato da Q_B per ogni χ , dato che:

$$Q_B (Q_B |\chi\rangle) = Q_B^2 |\chi\rangle = 0 |\chi\rangle = 0, \quad (\text{A.4.17})$$

avendo usato la (A.4.14).

Pertanto, per la (A.4.10), uno stato della forma (A.4.16) è fisico.

Comunque, esso è ortogonale a tutti gli stati fisici incluso sè stesso, dato che:

$$\langle \psi | (Q_B | \chi \rangle) = (\langle \psi | Q_B) | \chi \rangle = 0 \quad (\text{A.4.18})$$

se $Q_B |\psi\rangle = 0$, cioè se $|\psi\rangle$ è uno stato fisico.

Gli stati che sono ortogonali a tutti gli stati fisici vengono detti *stati spuri*, mentre gli stati che sono sia fisici che spuri vengono detti *stati nulli*.

Pertanto uno stato della forma (A.4.16) è uno stato nullo.

Quindi tutte le ampiezze fisiche che coinvolgono un tale stato nullo valgono zero.

Due stati fisici $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$ che differiscono per uno stato nullo:

$$|\psi'\rangle = |\psi\rangle + Q_B |\chi\rangle \quad (\text{A.4.19})$$

avranno lo stesso prodotto interno con tutti gli stati fisici, dato che:

$$\langle \eta | \psi' \rangle = \langle \eta | (|\psi\rangle + Q_B |\chi\rangle) = \langle \eta | \psi \rangle + \langle \eta | Q_B |\chi\rangle = \langle \eta | \psi \rangle + (Q_B | \eta \rangle)^\dagger | \chi \rangle = \langle \eta | \psi \rangle + 0 | \chi \rangle = \langle \eta | \psi \rangle,$$

(A.4.20)

per qualsiasi stato fisico $|\eta\rangle$, e quindi $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$ sono fisicamente equivalenti.

Così identifichiamo lo spazio fisico vero con un set di *classi di equivalenza*, poichè gli stati che differiscono per uno stato nullo sono equivalenti.

Questa è una costruzione naturale per un operatore nilpotente, ed è nota come *co-omologia* di Q_B .

In co-omologia, il termine *chiuso* (closed) è spesso usato per stati annichilati da Q_B , mentre il termine *esatto* (exact) per stati della forma (A.4.16).

Così, la nostra prescrizione è:

$$\mathcal{H}_{BRST} = \frac{\mathcal{H}_{CLOSED}}{\mathcal{H}_{EXACT}}. \quad (\text{A.4.21})$$

Questo spazio ha la forma che ci si aspettava nella teoria delle stringhe.

Essenzialmente, la condizione d'invarianza rimuove un set di oscillatori X^μ non fisici ed un set di oscillatori di ghost, e la relazione di equivalenza rimuove gli altri set di oscillatori X^μ non fisici e gli altri set di oscillatori di ghost.

Dobbiamo sottolineare il fatto che abbiamo fatto due assunzioni semplificatrici riguardo all'algebra di gauge (A.4.1).

La prima è che le costanti di struttura $f^{\alpha}_{\beta\gamma}$ siano costanti, indipendenti dai campi, e la seconda è che l'algebra non abbia, sul lato destro della (A.4.1), termini addizionali proporzionali alle equazioni del moto.

Più in generale, entrambe queste assunzioni sono rotte.

In questi casi, il formalismo BRST, così come lo abbiamo descritto, non dà una trasformazione nilpotente, ed è richiesta una generalizzazione, nota come *formalismo di Batalin-Vilkovisky* [15][16][17].

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. Griffiths, “Introduction to Elementary Particles”, Wiley, John Wiley & Sons, Inc., 1987.
- [2] J. Polchinski, “String Theory Volume I, An Introduction to the Bosonic String”, Cambridge University Press.
- [3] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, “Superstring Theory Volume 1, Introduction”, Cambridge University Press.
- [4] J. Polchinski, “String Theory Volume II, Superstring Theory and Beyond”, Cambridge University Press.
- [5] E. Witten, “On Background Independent Open String Field Theory”, *Phys. Rev.* **D46** (1992) 5467, hep-th/9208027.
- [6] A. Sen, “Tachyon Dynamics in Open String Theory”, hep-th/0410103.
- [7] R. Casalbuoni, J. Gomis and G. Longhi, “The relativistic point revisited in the light of the string model”, *Nuovo Cimento* **24A** (1974) 249.
- [8] Gerard ‘t Hooft, “Introduction to String Theory”, version 14-05-04.
- [9] K. Ohmori, “A Review on Tachyon Condensation in Open String Field Theories”, hep-th/0102085.
- [10] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “On a Nonperturbative Vacuum for the Open Bosonic String”, *Nucl. Phys.* **B336** (1990) 263.
- [11] W. Taylor, “D-brane Effective Field Theory from String Field Theory”, *Nucl. Phys.* **B585** (2000) 171-192, hep-th/0001201.
- [12] N. Moeller and W. Taylor, “Level truncation and the tachyon in open bosonic string field theory”, *Nucl. Phys.* **B583** (2000) 105-144, hep-th/002237.
- [13] Rovelli, C., *Quantum Gravity*, Published by Cambridge University Press Year=2004 ID=ISBN 0-521-837332.
- [14] L. Smolin, “The case for background independence”, hep-th/0507235.
- [15] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Rev.* **D28**, 2567 (1983).
- [16] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B69**, 309 (1977).
- [17] D. Binosi and J. Papavassiliou, “Pinch Technique and the Batalin-Vilkovisky formalism”, hep-ph/0204128.
- [18] B. Zwiebach, “Closed String Field Theory: Quantum Action And The B-V Master Equation”, IASSNS-HEP-92/41.
- [19] C. Thorn, “Perturbation Theory For Quantized String Fields”, *Nucl. Phys.* **B287** (1987) 61.
- [20] M. Bochicchio, “Gauge Fixing For The Field Theory Of The Bosonic String”, *Phys. Lett.* **B193** (1987) 31.
- [21] E. Witten and B. Zwiebach, “Algebraic Structures And Differential Geometry In 2D String Theory”, IASSNS-HEP-92/4.
- [22] E. Verlinde, “The Master Equation Of 2D String Theory”, IASSNS-HEP-92/5.
- [23] S. Shatashvili, “Comment on the Background Independent Open String Theory”, *Phys. Lett.* **B311** (1993) 83, hep-th/9303143.
- [24] S. Shatashvili, “On the Problems with Background Independence in String Theory”, hep-th/9311177.
- [25] A. B. Zamolodchikov, “Integrable Field Theory From Conformal Field Theory”, *Adv. Stud. Pure Math.* **19**, 641 (1989).

- [26] I. R. Klebanov and L. Susskind, “Renormalization Group and String Amplitudes”, *Phys. Lett.* **B200**, 446 (1988).
- [27] E. Coletti, V. Forini, G. Grignani, G. Nardelli, M. Orselli, “Exact potential and scattering amplitudes from the tachyon non-linear β -function”, hep-th/0402167.
- [28] E. Witten, “Some Computations in Background Independent Off-shell String Theory”, *Phys. Rev.* **D47** (1993) 3405, hep-th/9210065.
- [29] D. Ghoshal and A. Sen, “Normalisation of the Background Independent Open String Field Theory Action”, *JHEP* **0011** (2000) 021, hep-th/0009191.
- [30] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, “Non-linear Electrodynamics from Quantized Strings”, *Phys. Lett.* **163B** (1985) 123.
- [31] A. Sen, “Time Evolution in Open String Theory”, hep-th/0207105.
- [32] J. Polchinski and Y. Cai, “Consistency of Open Superstring Theories”, *Nucl. Phys.* **B296**, 91 (1988).
- [33] C. G. Callan, C. Lovelace, C. R. Nappi and S. A. Yost, “Adding holes and crosscaps to the superstring”, *Nucl. Phys.* **B293**, 83 (1987).
- [34] M. Li, “Boundary States of D-Branes and Dy-Strings”, *Nucl. Phys.* **B460**, 351 (1996) [hep-th/9510161].
- [35] O. Bergman and M. R. Gaberdiel, “A Non-Supersymmetric Open String Theory and S-duality”, *Nucl. Phys.* **B499**, 183 (1997) [hep-th/9701137].
- [36] F. Larsen, A. Naqvi, and S. Terashima, “Rolling Tachyons and Decaying Branes”, hep-th/0212248.
- [37] A. Sen, “Rolling tachyon”, *JHEP* **0204**, 048 (2002), hep-th/0203211.
- [38] A. Sen, “Time and Tachyon”, hep-th/0209122.
- [39] P. Ginsparg, “Applied Conformal Field Theory”.